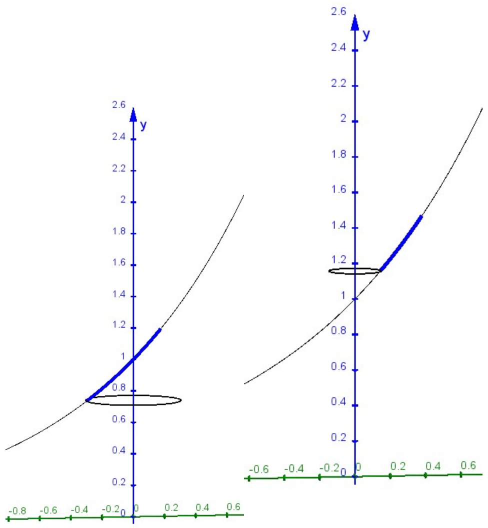
回転体の体積から平均値の定理

21 九州　後期

実数 a は $a>1$ とする。
曲線 $y=e^x$ と直線 $y=a-1$，直線 $y=a$ および y 軸で囲まれた部分を
y 軸の周りに一回転させて得られる立体の体積を $V(a)$ とする。
(1) $V(a)$ を求めよ。
(2) $V(a)$ を最小とする a の値を求めよ。
(3) 次の極限を求めよ。 $\lim_{a\to\infty}(V(a)-V(a-1))$
必要ならば，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$　を証明なしで用いてよい。

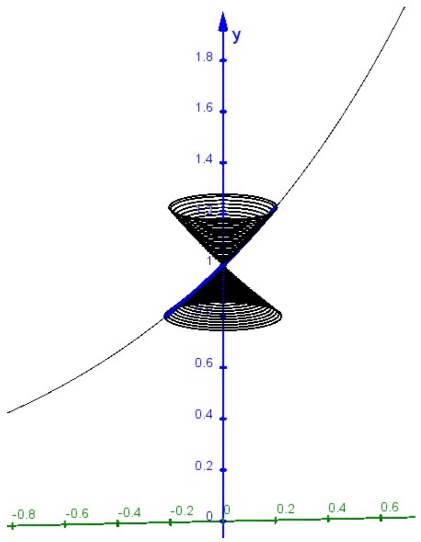
体積の問題は目新しくはないが，平均値の定理ってのが最近あまり出題されない。
九大は微積分の問題が特異でいいよな。
(1) まず，場合分け　(i)$1<a\leqq 2$ のとき　(ii)$2\leqq a$ のとき



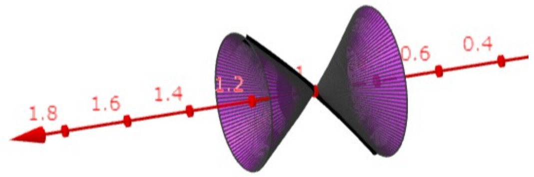
しかし，どちらも 被積分関数が偶関数なので
$V(a)=\pi\displaystyle\int_{a-1}^{a}(\log y)^2dy$
$\dfrac{V(a)}{\pi}=\Big[y(\log y)^2\Big]_{a-1}^{a}-\displaystyle\int_{a-1}^{a}y\cdot 2(\log y)\frac{1}{y}dy$
$=a(\log a)^2-(a-1)\{\log(a-1)\}^2-2\Big[(y\log y-y)\Big]_{a-1}^{a}$
よって，
$\dfrac{V(a)}{\pi}=a(\log a)^2-(a-1)\{\log(a-1)\}^2$
$-2a\log a+2(a-1)\log(a-1)+2$

(2) 微分するには，$V(a)=\pi\displaystyle\int_{a-1}^{a}(\log y)^2dy$ が便利で，
$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{dV(a)}{da}=(\log a)^2-\{\log(a-1)\}^2=0$ となるのは，
$\log a=\log(a-1)$(これは不適)
or　$\log a=-\log(a-1)$ つまり $a=\dfrac{1}{a-1}$
よって，$a^2-a-1=0, a>1$ より $a=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

a	(1)		$\frac{1+\sqrt5}{2}$	
V'		$-$	0	$+$
V		↘	最小	↗



ちなみに，Geogebra の Revolution(回転体) で描くと
（Web 版しかない，x 軸の周りの回転体）



(3) さて，平均値の定理。
引き算を見れば，変化率に結びつき，連続，微分可能性で平均値の定理を使うことになる。
$V(a)-V(a-1)=\dfrac{V(a)-V(a-1)}{a-(a-1)}=V'(b), a-1<b<a$ なる b が存在する。
$a\to\infty$ のとき $b\to\infty$ なので $\lim_{a\to\infty}(V(a)-V(a-1))=\lim_{b\to\infty}V'(b)$
ところで，$\dfrac{V'(b)}{\pi}=(\log b)^2-\{\log(b-1)\}^2=\dfrac{(\log b)^2-\{\log(b-1)\}^2}{b-(b-1)}=f'(c), (b-1<c<b)$
ただし $f(x)=(\log x)^2$，だから $f'(x)=2\log x\cdot\dfrac{1}{x}$，$a\to\infty$ のとき $c\to\infty$ なので
$\lim_{a\to\infty}(V(a)-V(a-1))=\lim_{c\to\infty}\pi f'(c)=2\pi\lim_{c\to\infty}\dfrac{\log c}{c}=0$

この問題はこれで終わりだが，ここからが私流。
証明なしに使っている $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を証明しようと。
これ自体が問題となることもあるし，この逆関数バージョン $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$ (n は自然数) が誘導付きで問題として出題されたこともある。
e^x は最速の関数であり，$\log x$ は最遅の関数なのだ。それで，誘導として**「解析概論」**の問題を使おう。
大学の予習ね。極限の証明といえば，$\epsilon-\delta$ 論法。これをちょっと覗いてみる。

第 1 章の練習問題　$f(x)$ は (a,∞) で連続で $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=l$ ならば $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$(Cauchy)

微分可能性がなく，連続性だけです。「ちょっと増える量の極限は速さの極限」って感じかな。
「$f(x)$ に $f(x)-lx$ を代用すれば，極限が 0 になり幾分簡単になる」とヒントとしてある。
で，証明すべきは $\lim_{x\to\infty}\{f(x+1)-f(x)\}=0$ ならば $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$
「一例として $f(x)=\log x$」とある。
$\lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}\log\dfrac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$ だから $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ というわけ。

(証明) 仮定より どんな小さい ϵ でも，$x\geqq h$ のとき，$|f(h+1)-f(h)|<\epsilon$ とできる h が存在する。
この h より大きい x で h と関係なく無限大に飛ぶ x がほしいので，工夫して
$|f(h+i)-f(h+i-1)|<\epsilon, (i=1,2,\cdots,n)$ を足し合わせると，$|f(h+n)-f(h)|<n\epsilon$
$h+n=x$ とすると，$|f(x)-f(h)|<(x-h)\epsilon$ つまり $-(x-h)\epsilon+f(h)<f(x)<(x-h)\epsilon+f(h)$
これを x で割って，$-(1-\dfrac{h}{x})\epsilon+\dfrac{f(h)}{x}<\dfrac{f(x)}{x}<(1-\dfrac{h}{x})\epsilon+\dfrac{f(h)}{x}$
h は固定されているので x を無限大に飛ばすと $-\epsilon<\dfrac{f(x)}{x}<\epsilon$ つまり $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\epsilon$ (証明終わり)

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ については，微分可能性があれば，ロピタルの定理を使ってあたりまえじゃんって？
まあね。