多変数の扱い方

21 東大

複素数 a, b, c に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1) α, β, γ を複素数とする。

$f(0) = \alpha, f(1) = \beta, f(i) = \gamma$ が成り立つとき，a, b, c をそれぞれ α, β, γ で表わせ。

(2) $f(0), f(1), f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，

$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(1) $f(0) = c = \alpha, f(1) = a + b + c = \beta, f(i) = -a + bi + c = \gamma$ を a, b, c について解けば，

$a = \dfrac{1}{2}\{\beta - \gamma + (\beta + \gamma - 2\alpha)i\}, b = \dfrac{1}{2}(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i), c = \alpha$

(2) $1 \leqq f(0) = \alpha \leqq 2, 1 \leqq f(0) = \beta \leqq 2, 1 \leqq f(0) = \gamma \leqq 2 \cdots ①$ のとき，

$f(2) = 4a + 2b + c = 3\beta - \gamma - \alpha + (\beta + \gamma - 2\alpha)i \cdots ②$ を調べればいい。

変数が α, β, γ だから，変数について整理し（これが変数を扱うときの基本）

$f(2) = (-1 - 2i)\alpha + (3 + i)\beta + (-1 + i)\gamma$

これを ① で動かせばいい。

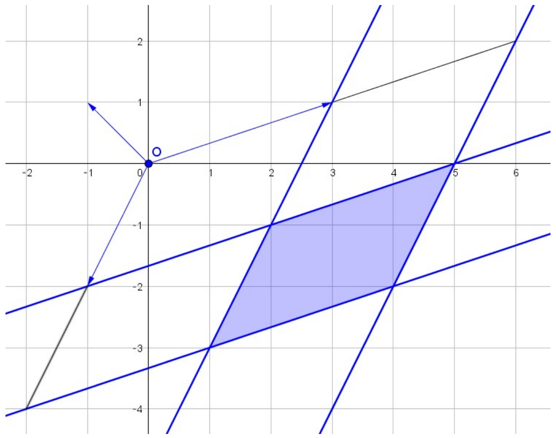
普通はベクトルで s, t の 2 変数で動かすところ，

3 変数で動かすことになる。

γ を止めて，$(\gamma = 0)$

まず $(-1 - 2i)\alpha + (3 + i)\beta$ を考えると，

$(1, -3), (4, -2), (5, 0), (2, -1)$ を頂点とする平行四辺形。



次に γ を動かす。

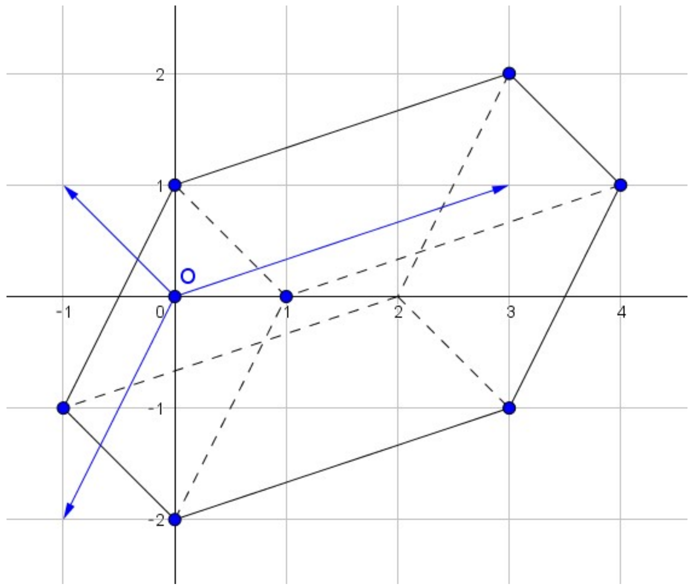
$(0, -2), (3, -1), (4, 1), (1, 0)$ を

頂点とする平行四辺形が

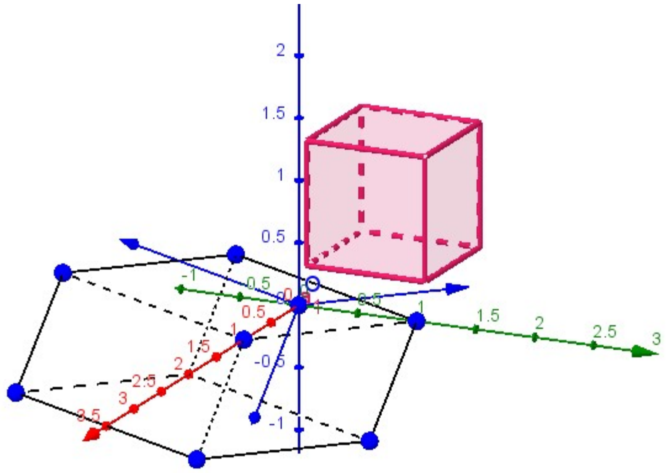
$(-1, -1), (2, 0), (3, 2), (0, 1)$ を

頂点とする平行四辺形に移る

通過領域が求める領域。



3 次元立方体を軸を変えて正射影というのが下の図。



これだけだと普通の解答だから別解を。

「変数が α, β, γ だから，変数について整理し（これが変数を扱うときの基本）」と書いたが，

別解は軌跡の考え方，そして多変数なら消去でしょ。

②から，$x = 3\beta - \gamma - \alpha, y = \beta + \gamma - 2\alpha$ とおいて，x, y の関係を調べる。

γ を消去して，$x + y = -3\alpha + 4\beta$ ①より $-2 \leqq x + y \leqq 5$

β を消去して，$x - 3y = 5\alpha - 4\gamma$ ①より $-3 \leqq x - 3y \leqq 6$

α を消去して，$2x - y = 5\beta - 3\gamma$ ①より $-1 \leqq 2x - y \leqq 7$

図示して，