複素数の代数的問題

早稲田・慶応と似たような問題が違った扱い方で出題されてます。

早稲田はこの問題の次が複素数の問題なので，整式の問題として出題されているのでしょう。

慶応は複素数の計算問題として出題されているのでしょう。

複素数の問題は主に幾何的な問題が多いのですが，これらは代数的な問題です。

整式とその整式から作られる方程式の解の関係です。これが**代数的**ということ。

21 早稲田

整式 $f(x)=x^4-x^2+1$ について，以下の問に答えよ。

(1) x^6 を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) x^{2021} を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ。

(3) 自然数 n が 3 の倍数であるとき，$(x^2-1)^n-1$ が $f(x)$ で割り切れることを示せ。

21 慶応

(1) 複素数 α は $\alpha^2+3\alpha+3=0$ を満たすとする。このとき，$(\alpha+1)^2(\alpha+2)^5$ の値を求めよ。
また，$(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t=3$ となる整数 s,t の組をすべて求めよ。

(2) 多項式 $(x+1)^3(x+2)^2$ を x^2+3x+3 で割ったときの商と余りを求めよ。
また，$(x+1)^{2021}$ を x^2+3x+3 で割ったときの余りを求めよ。

趣旨に沿って，早稲田は整式の問題として，慶応は複素数の問題として，まず解答する。

(1) 割り算を実行してもたいしたことはないが，$(x^4-x^2+1)(x^2+1)=x^6+1$ を見抜くのは難しくない。
よって，$x^6=(x^4-x^2+1)(x^2+1)-1$ なので，求める余りは -1

(2)　mod　記号を，整式でも使うと，　mod x^4-x^2+1 で
$x^6\equiv-1$ なので，$x^{2021}=x^{6\cdot336+5}\equiv(-1)^{336}\cdot x^5=x^5=(x^4-x^2+1)x+x^3-x\equiv x^3-x$

(3) 条件より，自然数 n' が存在して，$n=3n'$
$(x^2-1)^{3n'}-1=(x^6-3x^4+3x^2-1)^{n'}-1=\{x^6-3(x^4-x^2+1)+3-1\}^{n'}-1\equiv(-1+2)^{n'}-1=0$
よって，$f(x)$ で割り切れる。

(1) $\alpha(\alpha^2+3\alpha+3)+1=1$ より，$(\alpha+1)^3=1$ を見抜くのはどうだろう。
ω を 1 の 3 乗根とすると，$\omega^3=1,\omega^2+\omega+1=0$ で，$\alpha+1=\omega$ つまり，$\alpha=\omega-1$ としてよい。
$(\alpha+1)^2(\alpha+2)^5=\omega^2(\omega+1)^5=\omega^2(-\omega^2)^5=-\omega^{12}=-(\omega)^{3\cdot4}=-1$
ω などといわず，そのまま解いてもいい。累乗の問題だからドモアブルを使いたいので極形式で表して，

$$\alpha=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2},\alpha+1=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\alpha+2=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{1}{3}\pi\right),\alpha+3=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\pm\frac{1}{6}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{1}{6}\pi\right)\right\}$$

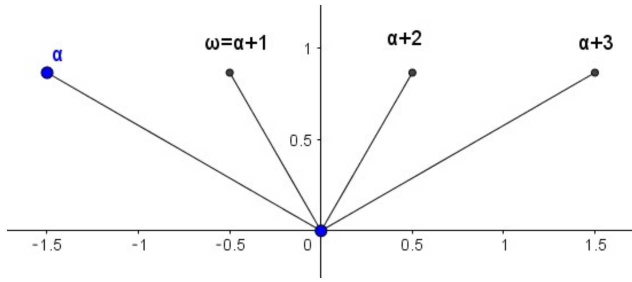
$(\alpha+2)^s(\alpha+3)^t=3$ に代入し（複号同順），

$$\cos\left(\pm\frac{s}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{s}{3}\pi\right)(\sqrt{3})^t\left\{\cos\left(\pm\frac{t}{6}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{t}{6}\pi\right)\right\}=3$$

$$(\sqrt{3})^t\cos\left(\pm(\frac{s}{3}+\frac{t}{6})\pi\right)+i\sin\left(\pm(\frac{s}{3}+\frac{t}{6})\pi\right)=3$$

よって，$t=2,\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{6}=2n$ つまり，$t=2,s=6n-1$(n は整数)

この計算 $\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\alpha+3$ が特殊な数だから。



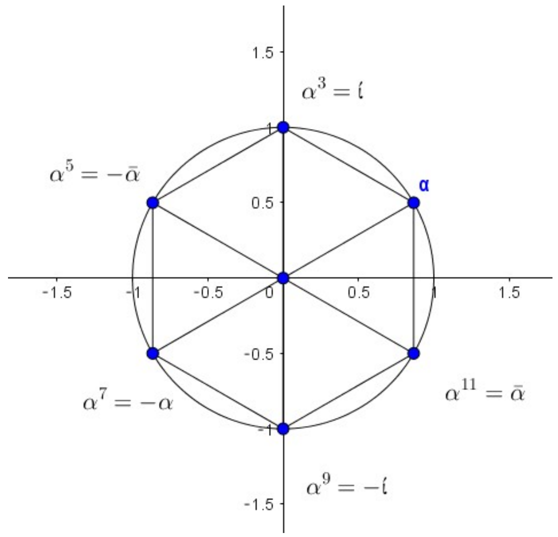
(2) 余りだけなら簡単で (1) もヒントとして使えるが，商まで求めなくてはいけないので，
$P=x^2+3x+3$ とすると，
$(x+1)^3(x+2)^2=(x^3+3x^2+3x+1)(x^2+4x+4)$
$=(xP+1)(P+x+1)=xP^2+(x^2+x+1)P+x+1=P(xP+x^2+x+1)+x+1$
で，商 x^3+4x^2+4x+1 ，余り $x+1$
後半は，余りは $ax+b$ とおけて，剰余の定理より
$a\alpha+b=(\alpha+1)^{2021}=\omega^{3\cdot673+2}=\omega^2=-\omega-1$
a,b は実数で，ω は虚数だから，$a=-1,-a+b=-1$ つまり，$a=-1,b=-2$
よって，求める余りは $-x-2$

慶応の (2) 後半を，整式の問題としてやると，　mod x^2+3x+3 で
$x(x^2+3x+3)+1=(x+1)^3\equiv1$ なので，$(x+1)^{2021}=(x+1)^{3\cdot673+2}\equiv(x+1)^2=x^2+2x+1\equiv-x-2$

早稲田の (2) 以下を，複素数の問題としてやると，
$x^6+1=0$ つまり $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0$
この解 -1 の 6 乗根を，右図のようにする。
$x^4-x^2+1=0$ の解を $\pm\alpha,\pm\bar{\alpha}$
余りは ax^3+bx^2+cx+d とおけて，剰余の定理より
$\alpha^{2021}=\alpha^{6\cdot336+5}=-\alpha^5=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$
$-\alpha^{2021}=-\alpha^{6\cdot336+5}=\alpha^5=-a\alpha^3+b\alpha^2-c\alpha+d$
つまり，

$$\frac{\sqrt{3}-i}{2}=ai+b\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+c\frac{\sqrt{3}+i}{2}+d$$

$$-\frac{\sqrt{3}-i}{2}=-ai+b\frac{1+\sqrt{3}i}{2}-c\frac{\sqrt{3}+i}{2}+d$$



a,b,c,d は実数，i は虚数なので，
$\sqrt{3}=b+c\sqrt{3}+d,-1=2a+\sqrt{3}b+c$
$-\sqrt{3}=b-c\sqrt{3}+d,1=-2a+\sqrt{3}b-c$
これを解いて，$a=1,b=d=0,c=-1$
よって，求める余りは　x^3-x

(3) も同様にすると，余りが　0 となることが証明できる。