準円　三度

2011 年の順天堂，立命，慈恵医科と昨年の滋賀医科大学で関連問題が出てます。
楕円の**極線**と**準円**は既述ずみだが新しいところもあるので。

21 上智

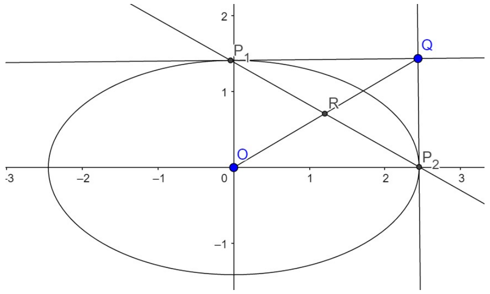
O を原点とする座標平面上において，楕円 D:$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上に異なる 2 点 P_1,P_2 がある。
P_1 における接線 ℓ_1 と P_2 における接線 ℓ_2 の交点を $Q(a,b)$ とし，線分 P_1P_2 の中点を R とする。
(1)P_1 の座標を (x_1,y_1) とするとき，ℓ_1 の方程式を求めよ。
(2) 直線 P_1P_2 の方程式を a,b を用いて表わせ。
(3)3 点 O,R,Q は一直線上にある。$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ となる実数 k を a,b を用いて表わせ。
(4) ℓ_1,ℓ_2 とのどちらも y 軸と平行ではないとする。
このとき， ℓ_1 の傾きと ℓ_2 の傾きを解とする t の 2 次方程式を a,b を用いて表わせ。
(5) とが直交しながら P_1,P_2 が動くとする。
(i)Q の軌跡の方程式を求めよ。
(ii)R の y 座標の最大値を求めよ。
(iii)R の軌跡の概形を描け。

(1) 接線の公式より　$x_1x+3y_1y-6=0$

(2) ℓ_2 は $x_2x+3y_2y-6=0$
(a,b) は両方通るので，$ax_1+3by_1-6=0, ax_2+3by_2-6=0$
よって，求める方程式は $ax+3by-6=0$
この 1 次方程式は P_1,P_2 を通るので，これが直線の方程式となるという，**極線**の方程式の求め方。

(3) 一直線上にあることをいうのは手数がかかるが，一直線上にあることを使ってということなら，
いろいろ方法はありそうで O と直線 P_1P_2 の距離は，$\dfrac{6}{\sqrt{a^2+9b^2}}$
O と，直線 P_1P_2 と平行で Q を通る直線 $a(x-a)+3b(y-b)=0$ との距離は，$\dfrac{a^2+3b^2}{\sqrt{a^2+9b^2}}$
よって，$k=\dfrac{6}{a^2+3b^2}$
一直線上にあることをいうのは，11 年のプリントに詳しいが，極線と楕円を連立して解と係数の関係を使って求める。スペースが余りそうなので，最後にやっとこうか。

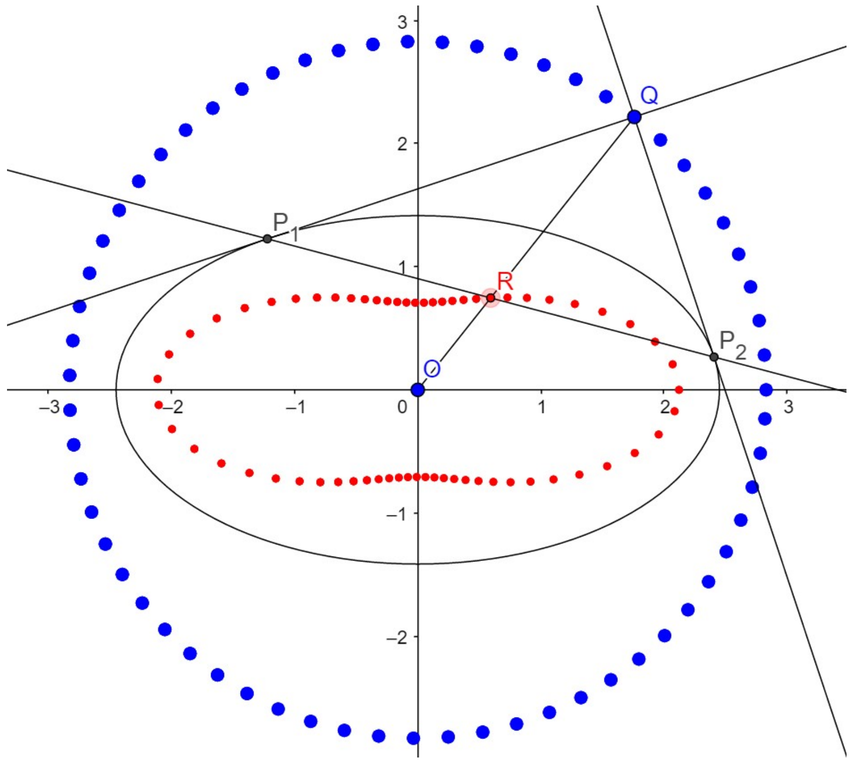
(4) Q を通る傾き t の直線 $y=t(x-a)+b$ と D を連立して，x の方程式にして，その判別式を 0 とする。
$x^2+3\{tx+(b-ta)\}^2=6$ 整理して，$(1+3t^2)x^2-6t(b-ta)x+3(b-ta)^2-6=0$
判別式の四分の一は，$9t^2(b-ta)^2-3(1+3t^2)\{(b-ta)^2-2\}=0$
整理して，$(b-ta)^2-2-6t^2=0$ つまり，$(a^2-6)t^2-2abt+b^2-2=0$



(5)(i) これが**準円**　ℓ_1,ℓ_2 が直交するので，傾きの積が -1。
(4) で求めた 2 次方程式の解の積が -1 なので，解と係数の関係より
$\dfrac{b^2-2}{a^2-6}=-1$ よって，$a^2+b^2=8$
（ℓ_1,ℓ_2 とのどちらかが 軸と平行になるときもこの円上にある）

(ii) ここからが新しいぞと。
$R(x,y)$ とおくと (3) より，$x=\dfrac{6}{a^2+3b^2}a, y=\dfrac{6}{a^2+3b^2}b$ ここで，$a^2+b^2=8$
すると，$y=\dfrac{6}{2b^2+8}b=\dfrac{3b}{b^2+4}$
1 変数になったので，これの増減を調べればいいが，(iii) もいっしょにやるか。
$y'=3\dfrac{b^2+4-2b^2}{(b^2+4)^2}=-3\dfrac{(b+2)(b-2)}{(b^2+4)^2}$
対称性により，第一象限のみ調べる。

b	0		2		$2\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
a	$2\sqrt{2}$		2		0
x	$\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$		$\dfrac{3}{4}$		0



O,R,Q が一直線上にあることを示す。
$x^2+3y^2=6$ と $ax+3by=6$ を連立して整理する。
$x^2+3\left(\dfrac{6-ax}{3b}\right)^2=6$ つまり $(a^2+3b^2)x^2-12ax+36-18b^2=0$
$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{6a}{a^2+3b^2}$ y 座標は $\dfrac{6b}{a^2+3b^2}$ よって，$\overrightarrow{OR}=\dfrac{6}{a^2+3b^2}\overrightarrow{OQ}$