面積の極限は極限の面積

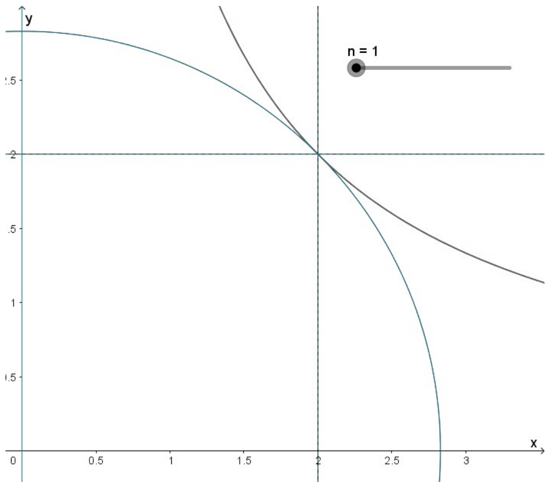
元は穴埋めの問題。

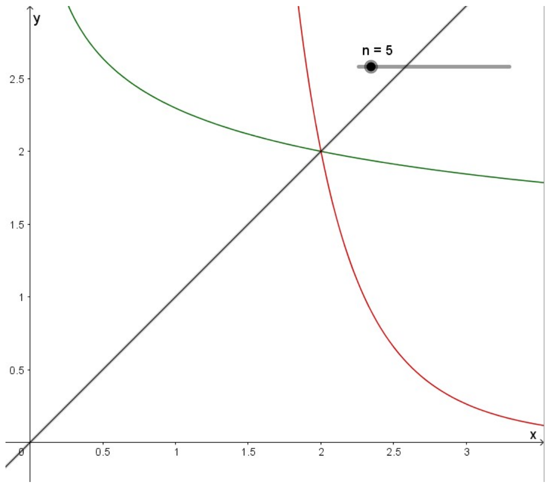
20 東京理科大

自然数 n に対して，関数 $f_n(x), g_n(x)$ を $f_n(x)=2\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}, g_n(x)=2\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n}$ と定める。
また，座標平面において，原点を中心とする半径 r_n の円 C_n が，
曲線 $y=f_n(x), y=g_n(x)$ のそれぞれと，第一象限においてただ 1 つの共有点をもつとする。
(1) 円 C_1 と曲線 $y=f_n(x)$ の共有点の座標を求めよ。
(2) $n \geqq 2$ とする。このとき，2 曲線 $y=f_n(x), y=g_n(x)$ はただ 1 つの共有点をもつ。
その座標を求めよ。
(3) r_2 を求めよ。
(4) n が自然数全体の集合を動くとき， r_n が最大になるときの n とその最大値を求めよ。
(5) $n \geqq 2$ のとき，円 C_n と 2 曲線 $y=f_n(x), y=g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。
このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ ということなどから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(1) $f_1(x)=\dfrac{4}{x}$ と直線 $y=x$ の交点がそれで，$(2,2)$

(2) $y=2\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}=2\left(\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ つまり $\left(\dfrac{y}{2}\right)^{n}=\dfrac{2}{x}, x=2\left(\dfrac{2}{y}\right)^{n}$
よって，$f_n(x)$ と $g_n(x)$ は逆関数の関係にあり，直線 $y=x$ に関して対称。
$y=2\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}$ と直線 $y=x$ の交点を求めて，$2\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}=x, \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{x}{2}, \dfrac{2}{x}=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n}, \left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+1}=1$
x は実数より，$x=2$，よって，求める座標は $(2,2)$





(3) $x^2+y^2=r_n^2$ と $y=2\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n}$ を連立して，$x^2+2^2\left(\dfrac{2}{x}\right)^{2n}=r_n^2$ 左辺を $h_n(x)$ とおいて，
$h_n(x)=r_n^2$ が重解を持つ条件を求めれば良い。
$h_n'(x)=2x-2n2^{2n+2}\dfrac{1}{x^{2n+1}}=2\dfrac{x^{2n*2}-n2^{2n+2}}{x^{2n+1}}=0$ となるのは，$x>0$ で $x=2n^{\frac{1}{2n+2}}=x_n$ とおいて，

x		x_n	
h'	$-$	0	$+$
h	↘	極小	↗

$$r_n^2=h(x_n)=(2n^{\frac{1}{2n+2}})^2+2^2\left(\frac{2}{2n^{\frac{1}{2n+2}}}\right)^{2n}$$
$$=2^2n^{\frac{1}{n+1}}+2^2\left(\frac{1}{n^{\frac{n}{n+1}}}\right)=2^2n^{\frac{1}{n+1}}+2^2\left(\frac{n^{\frac{1}{n+1}}}{n}\right)$$
$$=2^2n^{\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ よって，} r_n=2n^{\frac{1}{2n+2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$n=2$ を代入して，$r_2=2\cdot2^{\frac{1}{6}}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=2^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}$ ちなみに $2^{\frac{1}{6}}\sqrt{6}$ も同じだけど，正解にしたかな。

(4) 図によって明らかに，$n=1$ のとき。$r_1=2\sqrt{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log n^{\frac{1}{n}}=0$ つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ なので，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}2n^{\frac{1}{2n+2}}=2\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}\frac{n}{2n+2}}=2$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r_n=2\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{2n+2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}\frac{n}{2n+2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=2$
求める面積は 1 辺の長さ 2 の正方形から，半径 2 の円の四半分の面積を引いて，
$4-\dfrac{4\pi}{4}=4-\pi$