準円　再び

2011 年つまり約 10 年前に同じ大学で関連問題が出てます。

20 滋賀医科

a,b を異なる正の実数とする。次の式で表される xy 平面上の円 C と楕円 E を考える。

C : $x^2+y^2=a^2+b^2$，E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

C 上の点 A から E に引いた 2 本の接線が再び交わる点をそれぞれ P,Q とする。

(1)　AP⊥AQ を示せ。

(2)　A が C 上を動くとき，△ APQ の面積を最大，最小にする A の座標をそれぞれ求めよ。

放物線の準線と同じ性質（その図形の上から引いた 2 本の接線が直交する）をもつ楕円の図形，準円と呼ぼう（「楕円の準円と極線」なる 2011 年のプリントあり）。そのプリントに詳しいが，

(1) C 上の点 A を (x_0,y_0) とすると，$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2\cdots$①

この点を通る直線で座標軸と平行なものを除いたものは，(以下，座標軸と平行なものは明らかだから除く)

$y=m(x-x_0)+y_0=mx+(y_0-mx_0)\cdots$② とおける。

これと楕円を連立して重解条件を使って，

$b^2x^2+a^2\{mx+(y_0-mx_0)\}^2-a^2b^2=0$

$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(y_0-mx_0)x+a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2=0$

判別式を D とすると，$D/4=a^4m^2(y_0-mx_0)^2-(a^2m^2+b^2)\{a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2\}=0$

$a^4b^2m^2-b^2a^2(y_0-mx_0)^2+a^2b^4=0$ つまり $a^2m^2-(y_0-mx_0)^2+b^2=0$

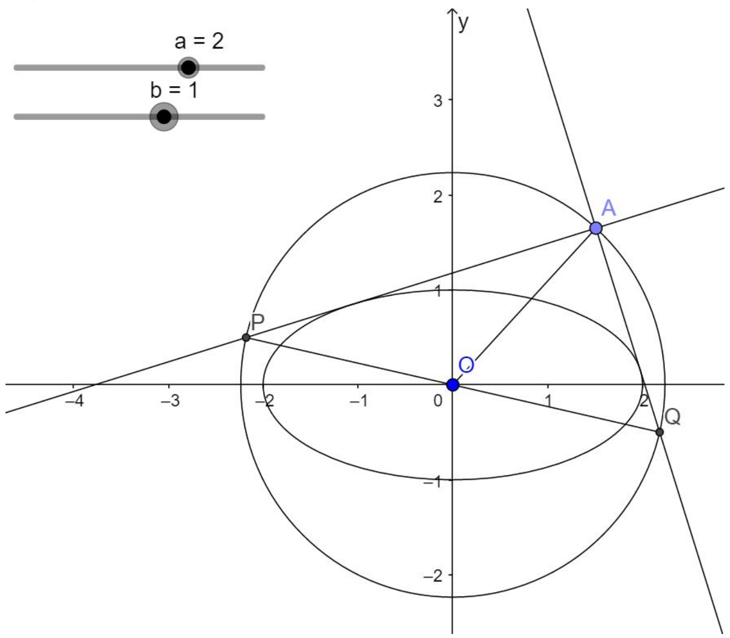
m の 2 次方程式と見て，$(a^2-x_0^2)m^2+2x_0y_0m-y_0^2+b^2=0\cdots$③

この判別式 $x_0^2y_0^2-(a^2-x_0^2)(-y_0^2+b^2)=a^2y_0^2+b^2x_0^2-a^2b^2>0$ より異なる 2 つの実数解を持つ。

（何故なら，A は楕円外の点なので $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$）

この解 m_1,m_2 の積が解と係数の関係で $m_1m_2=\frac{a^2-x_0^2}{b^2-y_0^2}=-1$ (何故なら，①より $a^2-x_0^2=y_0^2-b^2$)

で，直交が示された。



(2) 最大は底辺 PQ 一定として高さを最大にする A がある。

$(0,\sqrt{a^2+b^2})$，同様に $(0,-\sqrt{a^2+b^2}),(\sqrt{a^2+b^2},0),(-\sqrt{a^2+b^2},0)$

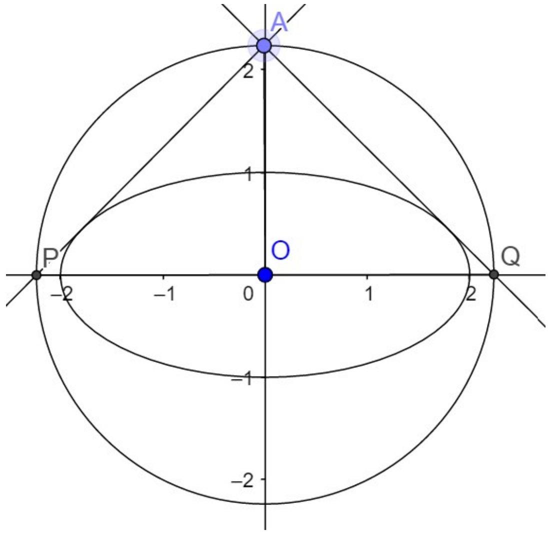
最小は AP が x 軸に平行になる (a,b)，同様に $(a,-b),(-a,b),(-a,-b)$ だろうなとはすぐわかっても，それを示すのが難しかった。面積を関数で表そうとしたがなかなかうまく行かない。

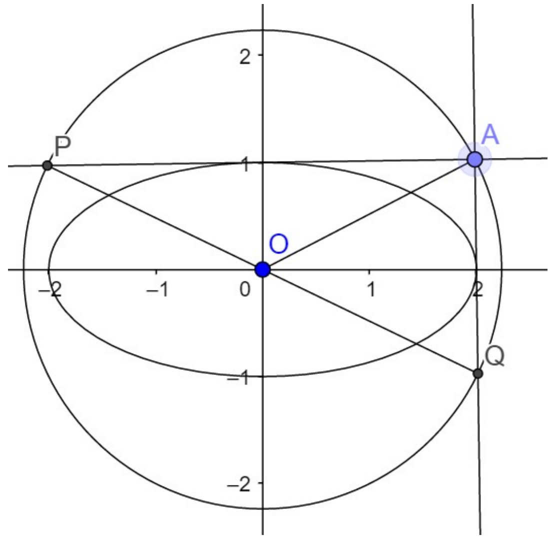
代数的にうまく行かなければ，幾何的に攻めるかということで，O と A を結ぶ線分をひくと，

$\triangle OAQ=\frac{1}{2}OA^2\sin\angle AOQ=\frac{1}{2}OA^2\sin\angle(180^\circ-\angle AOQ)=\triangle OAP$

つまり，△ OPA の面積を最大最小にする，つまり $\angle POA$ を最大最小にする A の座標を求めればいい。

$\angle POA$ を最大にするのは PA が x 軸と平行なるとき。(a,b)，同様に $(a,-b),(-a,b),(-a,-b)$





代数的に面積を関数表示しようと悪戦苦闘しました。これは難しかった。

(x_0,y_0) を決めると，すぐに決まるのが**極線**（2 つの接点を通る直線）$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$

これを使って，線分 PQ は円周角が直角だから円の中心を通り極線に平行（これ最後に証明）。

つまり，$b^2x_0x+a^2y_0y=0$

PQ は直径なので，面積の最大最小は A と直線 PQ との距離 d で決まる。

$d=\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}$ できた。①の下でこの関数の最大最小を求めればいい。1 変数消去でもいいが，

$$d=\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2x_0^2+a^2y_0^2)-a^2b^2(x_0^2+y_0^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2}{\sqrt{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2+a^2b^2}{\sqrt{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{\sqrt{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}+\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}}\right\}$$

$\geqq\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}2\sqrt{a^2b^2}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ やった！総火葬場（なんという誤変換だ　相加相乗ね）平均の関係。

等号成立は，$b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=a^2b^2$ つまり $b^2x_0^2+a^2y_0^2=2a^2b^2$ ①と連立すれば終了。$(x_0,y_0)=(\pm a,\pm b)$

最後に，PQ の傾きが $-\frac{a^2x_0}{b^2y_0}$ を示す。円と②を連立して，$P\left(\frac{(m^2-1)x_0-2my_0}{1+m^2},\frac{(1-m^2)y_0-2mx_0}{1+m^2}\right)$

ここで，③より　$m^2-1=\frac{2x_0y_0m}{x_0^2-a^2}$ を使って，①より　$x_0^2-a^2=b^2-y_0^2$ に注意して，

OP の傾きは $\frac{\frac{2x_0y_0m}{x_0^2-a^2}x_0-2my_0}{-\frac{2x_0y_0m}{x_0^2-a^2}y_0-2mx_0}=-\frac{a^2x_0}{b^2y_0}$

とかく楕円は計算複雑だが，実行してみましたって内容でした。