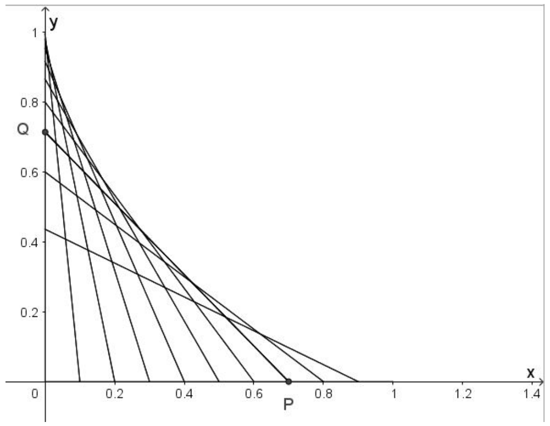
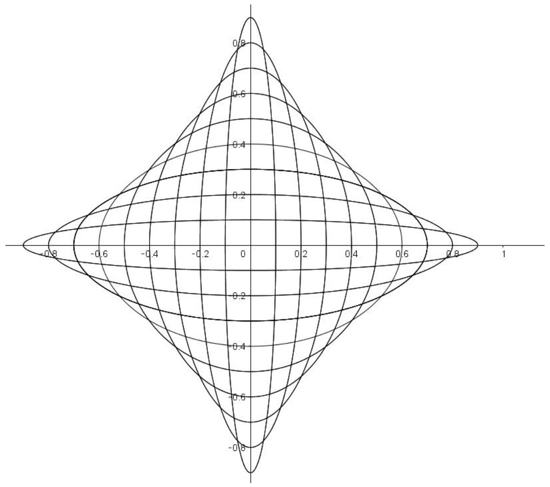
包絡線

20 お茶の水

座標平面において点 P,Q がそれぞれ x 軸上， y 軸上にあって，線分 PQ の長さが 1 の状態を保ちながら動くものとする。
(1) $0<t<1$ となる t を固定する。線分 PQ を動かすとき PQ を $t:1-t$ に内分する点の軌跡の方程式を求めよ。
(2) 線分 PQ が通る座標平面上の領域の境界を表す方程式を求めよ。
(3) (2) の領域の境界の長さを求めよ。

これは有名な（「解析概論」にもある）問題。
(1) $\mathrm{P}(p,0),\mathrm{Q}(0,q)$ とすると，$p^2+q^2=1\cdots$①
PQ を $t:1-t$ に内分する点の座標 (x,y) は，$((1-t)p,tq)$，つまり，$p=\dfrac{x}{1-t}, q=\dfrac{y}{t}\quad(0<t<1)$
①に代入して，求める軌跡の方程式は $\dfrac{x^2}{(1-t)^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1\cdots$②





(2) 線分 PQ 達（族）の包絡線（通過領域の境界）は楕円達（族）の包絡線でもある。
②は代数的に t の方程式と見ると，4 次方程式。これで解こうとしたがすぐには上手くいかない（後でこの方法でも解きますけど）。
y^2 を，解析的に t の関数と見る。x,y 軸に関して対称なので第 1 象限に限ろう。
通過領域の解法には，2 つあるぞというのが大切。（というか，数学の解法には幾何学的方法と合わせて，3 つあるぞというのが私の口癖）
$y^2=t^2-\dfrac{x^2t^2}{(1-t)^2}=t^2\left\{1-\dfrac{x^2}{(1-t)^2}\right\}=f(t)$ とおいて，この変域を求める。
$f'(x)=2t\left\{1-\dfrac{x^2}{(1-t)^2}\right\}-2t^2\dfrac{x^2}{(1-t)^3}=2t\dfrac{(1-t)^3-x^2(1-t)-tx^2}{(1-t)^3}=2t\dfrac{(1-t)^3-x^2}{(1-t)^3}$

$f'=0$ となるのは，$t=1-x^{\frac{2}{3}}$，

t	(0)		$1-x^{\frac{2}{3}}$		(1)
f'	(0)	$+$	0	$-$	/
f	(0)	↗	極大	↘	/

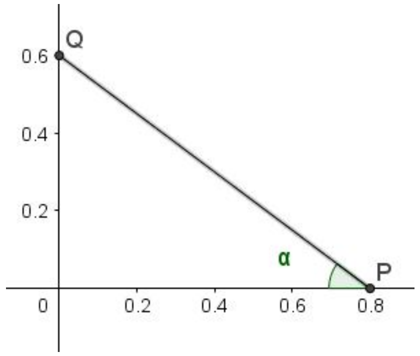
$y^2\leqq f(1-x^{\frac{2}{3}})=(1-x^{\frac{2}{3}})^2\left\{1-\dfrac{x^2}{x^{\frac{4}{3}}}\right\}=(1-x^{\frac{2}{3}})^3$ つまり，$y^{\frac{2}{3}}\leqq 1-x^{\frac{2}{3}}$
よって，求める方程式は $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ **アステロイド**です。

(3) $x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta$ とおけて

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3\cos^2\theta(-\sin\theta))^2+(3\sin^2\theta(\cos\theta))^2}d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$=6\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=6\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6$，円だと $2\pi\fallingdotseq 6.28$　だから，円よりちょっと小さい。
解答を作った後で見れば，笑っちゃうほど某予備校の模範解答と同じだなあ。代数的な方程式論を使うのが難しいからだろう。模範解答には何故こうやるかという解説はない。
受験生には難しいんじゃないかなあ。さすが，お茶の水。

「解析概論」では，この問題は次のように解いている。



変数 α を左図のように決める。
すると，直線 PQ の方程式は $\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}=1\cdots$③
よって，$x=\cos^3\alpha, y=\sin^3\alpha$ とすると上手く式は成立する。
じゃないですよ。
これしかないという決め手は，接線だから微分ですね。
③を α で微分すると，
$\dfrac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0\cdots$④

微分した式と連立するというのが「解析概論」の包絡線の定理。
③と④ を連立して解くと，$x=\cos^3\alpha, y=\sin^3\alpha$

こいつを真似すると，②が成り立つのは $x=(1-t)^{\frac{3}{2}}, y=t^{\frac{3}{2}}$ じゃないですよ。
② からの $t^2x^2+(1-t)^2y^2=t^2(1-t)^2$ を t で微分して整理して，$tx^2-(1-t)y^2=t(1-t)(1-2t)$
これが実は方程式論で， t に関する 4 次方程式が $0<t<1$ に少なくとも 1 つの解をもつことを考えることと同じことになっている。（両辺のグラフが接するところを求めてるわけだ）
これらを連立して，x^2, y^2 について解くと，$x^2=(1-t)^3, y^2=t^3$
で，$x=(1-t)^{\frac{3}{2}}, y=t^{\frac{3}{2}}$　で，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ （第 1 象限でやってます）
(3) の長さも，こっちのほうがとても楽で， $x=(1-t)^{\frac{3}{2}}, y=t^{\frac{3}{2}}$　で

$$4\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=4\cdot\frac{3}{2}\int_0^1\sqrt{1-t+t}dt=6\Big[t\Big]_0^1=6$$

少し余ったから，もう一話題。
（スペースが足りないので計算省略しつつ）
楕円とアステロイドってのは仲が良く，
楕円の縮閉線（法線の包絡線）がアステロイド。
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ での法線は，
$a\sin\theta x-b\cos\theta y=\dfrac{a^2-b^2}{2}\sin 2\theta$
θ で微分した，$a\cos\theta x+b\sin\theta y=(a^2-b^2)\cos 2\theta$ と連立して
x,y について解くと，
$x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta, y=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3\theta$