双曲線の面積

19　お茶の水

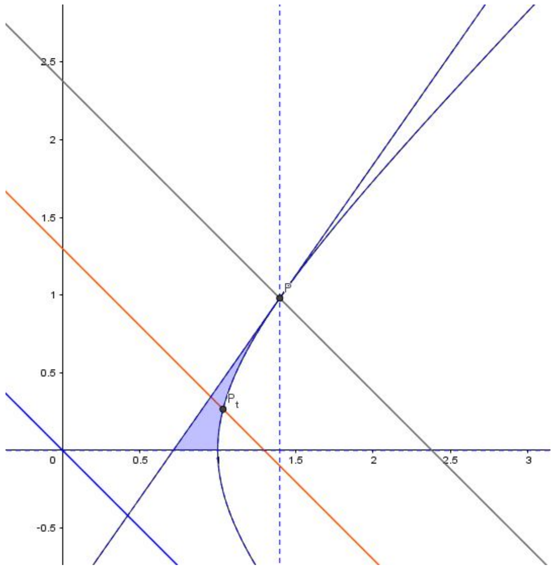
座標平面において双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を C とする。
双曲線 C の漸近線のうち傾きが負の漸近線を l とする。
(1) 漸近線 l の方程式を書け。
(2) t を正の実数とする。 y 軸上の点 $(0, t)$ を通り漸近線 l に平行な直線を l_t で表す。
直線 l_t と曲線 C との交点を P_t とするとき，
点 P_t の x 座標，y 座標をそれぞれ t を用いた式で表わせ。
(3) 曲線 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は第一象限にあるとし，点 P の x 座標を p とする。
(i) 点 P を通り漸近線 l に平行な直線の y 軸との交点の y 座標を p を用いた式で表わせ。
(ii) 点 P における曲線 C の接線と x 軸と曲線 C で囲まれた図形の面積を p を用いた式で表せ。

(1) 「書け」ってことは，理由もなく $y = -x$

(2) $t > 0$ のとき，
$l_t : y = -x + t$ と $x^2 - y^2 = 1$ を連立して解くと，
$\mathrm{P}_t\left(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\right)$

(3) (i) $p > 0$ のとき，$\mathrm{P}(p, \sqrt{p^2-1})$ だから，
P を通り l に平行な直線は $y = -(x-p) + \sqrt{p^2-1}$
よって，求める y 座標は $p + \sqrt{p^2-1}$

(ii) 接線の方程式は $px - \sqrt{p^2-1}y = 1$
図の青い部分の面積を求めればよい。
接線と x 軸の交点の x 座標は $\left(\frac{1}{p}, 0\right)$



x 軸に沿えば　$\frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)\sqrt{p^2-1} - \int_1^p \sqrt{x^2-1}dx \cdots ①$

y 軸に沿えば　$\int_0^{\sqrt{p^2-1}} \sqrt{y^2+1}dy - \frac{1}{2}(p+\frac{1}{p})\sqrt{p^2-1} \cdots ②$

② なんかはすぐ置換積分（$y = \tan\theta$）したくなるが，凄い計算に落ちることになる。
時間が限られた入試問題だから，ヒントに沿うことになる。
これが「解析概論」にあるんだな。しかも私が「再読・高木貞治」で書いといたもの。
趣味的に，ヒントを使うのは違う方法もあって，直線 $y = x$ を軸（s 軸として）とする方法。

$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$($l_t$と $x+y=1$ の交点の y 座標) $+ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{2}}}$ (P_tと l_tの距離)$ds \cdots ③$

これも後に示すような凄い計算量。
問題の本質は $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の積分。

解答は，まずヒントに従って，$I = \int_1^p \sqrt{x^2-1}dx$ を $x = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ と置換積分する。

$\begin{array}{c|cc} x & 1 & p \\ \hline t & 1 & p+\sqrt{p^2-1} \end{array}$ $, dx = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{t^2})dt, \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$ なので，

$$I = \int_1^{p+\sqrt{p^2-1}} \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\frac{1}{2}(1-\frac{1}{t^2})dt = \frac{1}{4}\int_1^{p+\sqrt{p^2-1}}(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3})dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} - 2\log t - \frac{1}{2t^2}\right]_1^{p+\sqrt{p^2-1}}$$

$$= \left[\frac{1}{8}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{2}\log t\right]_1^{p+\sqrt{p^2-1}} = \left[\frac{1}{8}(t+\frac{1}{t})(t-\frac{1}{t}) - \frac{1}{2}\log t\right]_1^{p+\sqrt{p^2-1}}$$

$$= \frac{1}{8}2p2\sqrt{p^2-1} - \frac{\log(p+\sqrt{p^2-1})}{2} = \frac{1}{2}\left\{p\sqrt{p^2-1} - \log(p+\sqrt{p^2-1})\right\}$$

で，$\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)\sqrt{p^2-1} - \frac{1}{2}\left\{p\sqrt{p^2-1} - \log(p+\sqrt{p^2-1})\right\} = \frac{1}{2}\left\{\log(p+\sqrt{p^2-1}) - \frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\right\}$

ああ，疲れた。（さすが，いやらしいお茶の水）

③時間を気にせず趣味でやった解答は，$y = x$ 軸（s 軸として）に沿えば

$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$($l_t$と $x+y=1$ の交点の y 座標) $+ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{2}}}$ (P_tと l_tの距離)ds

$$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})(p-1)(p-\sqrt{p^2-1}) + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{\sqrt{2}}} \frac{(p-\sqrt{p^2-1})t^2 - 2t + p + \sqrt{p^2-1}}{2t\sqrt{2p^2-1}}ds$$

$\sqrt{2}s = t$ で置換積分 $(\sqrt{2}ds = dt)$

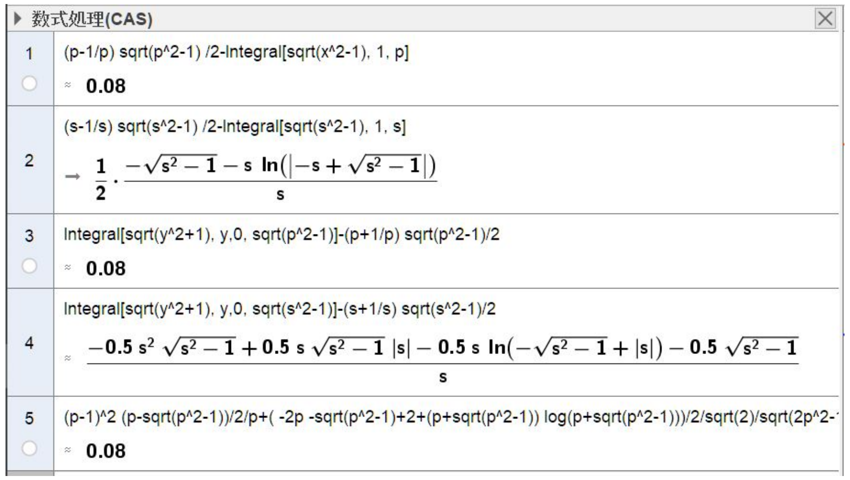
$$= \frac{1}{2p}(p-1)^2(p-\sqrt{p^2-1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2p^2-1}}\int_1^{p+\sqrt{p^2-1}}\left\{(p-\sqrt{p^2-1})t - 2 + \frac{p+\sqrt{p^2-1}}{t}\right\}dt$$

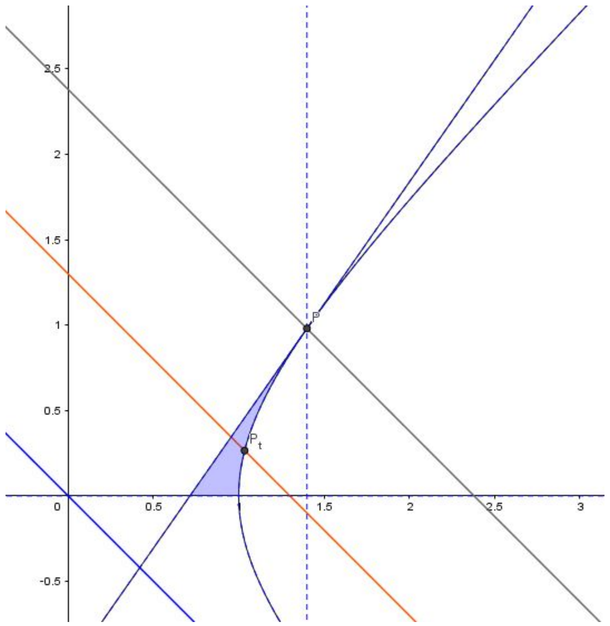
$$= \frac{1}{2p}(p-1)^2(p-\sqrt{p^2-1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2p^2-1}}\left[(p-\sqrt{p^2-1})\frac{t^2}{2} - 2t + (p+\sqrt{p^2-1})\log t\right]_1^{p+\sqrt{p^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2p}(p-1)^2(p-\sqrt{p^2-1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2p^2-1}}\{\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{2} - 2(p+\sqrt{p^2-1}) + (p+\sqrt{p^2-1})\log(p+\sqrt{p^2-1}) - \frac{p-\sqrt{p^2-1}}{2} + 2\}$$

$$= \frac{1}{2p}(p-1)^2(p-\sqrt{p^2-1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2p^2-1}}\{-2p-\sqrt{p^2-1}+2+(p+\sqrt{p^2-1})\log(p+\sqrt{p^2-1})\}$$

もう整理する気しない。でも，実験すると答は合ってるんだよな。これでも正解にしてくれよ，と。





で,「解析概論」。**問題の本質は $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の積分。**まず，$\sqrt{x^2 \pm p^2}, \sqrt{p^2-x^2}$ に帰着できる。
方法は一つではない。根号を開くために三角関数を用い，それぞれ $x = p\tan\theta, x = p\sec\theta, x = p\sin\theta$ と置換する。（暗記受験数学では $x = p\tan\theta, x = p\sin\theta$ だけ有名になっているが。）そして，三角関数の積分に持ち込む。
もう一つは,「代数的変換によって直接に有理化する」方法。これが入試問題にアレンジされてるわけ。
$y = \sqrt{x^2-1}, y^2 = x^2-1$ 双曲線を漸近線に平行な直線を使って，媒介変数表示するともいえる。これ私が「再読・高木貞治」で書いといたもの。

　最後に，違う置換の仕方を
双曲線関数というのがあって，$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ つまり，$x = \cosh t, y = \sinh t$ とおけば，$x^2 - y^2 = 1$
$\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ というのがその中身。
置換は $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, dx = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2},$ $\begin{array}{c|cc} x & 1 & p \\ \hline t & 0 & p+\sqrt{p^2-1} \end{array}$

$I = \displaystyle\int_1^p \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{4}\int_0^{p+\sqrt{p^2-1}} (e^t - e^{-t})^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{p+\sqrt{p^2-1}} (e^{2t} - 2 + e^{-2t})dt$
$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{e^{2t}}{2} - 2t + \dfrac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{p+\sqrt{p^2-1}} = \left[\dfrac{1}{8}(e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t}) - \dfrac{1}{2}t\right]_0^{p+\sqrt{p^2-1}}$
$= \dfrac{1}{2}\left\{p\sqrt{p^2-1} - \log(p + \sqrt{p^2-1})\right\}$
若干計算が楽ではないですか？しかも，$\sqrt{1-x^2}$ なら三角関数（円関数）で，$\sqrt{x^2-1}$ なら双曲線関数で置換すればいいと覚えられる。