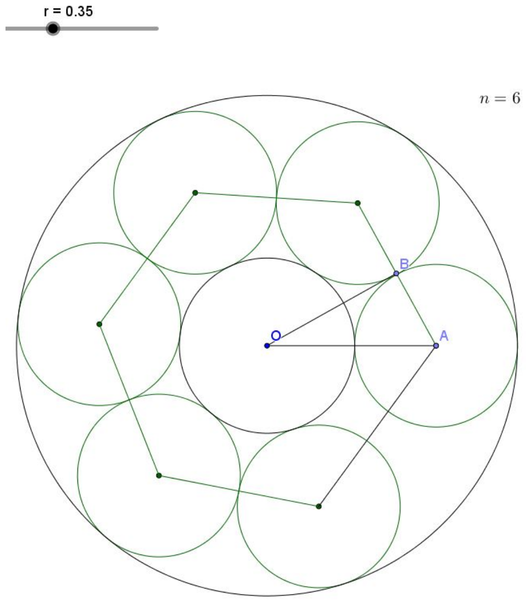
2円の間の内接円たち

20　信大
$0 < r < 1$ とし，半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする。
円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く。
ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。
描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to 1-0} f(r)$ を求めよ。

「できるだけたくさん」ってとこが面白いし，この幅がはさみうちの原理を呼ぶのだなと予想できる。

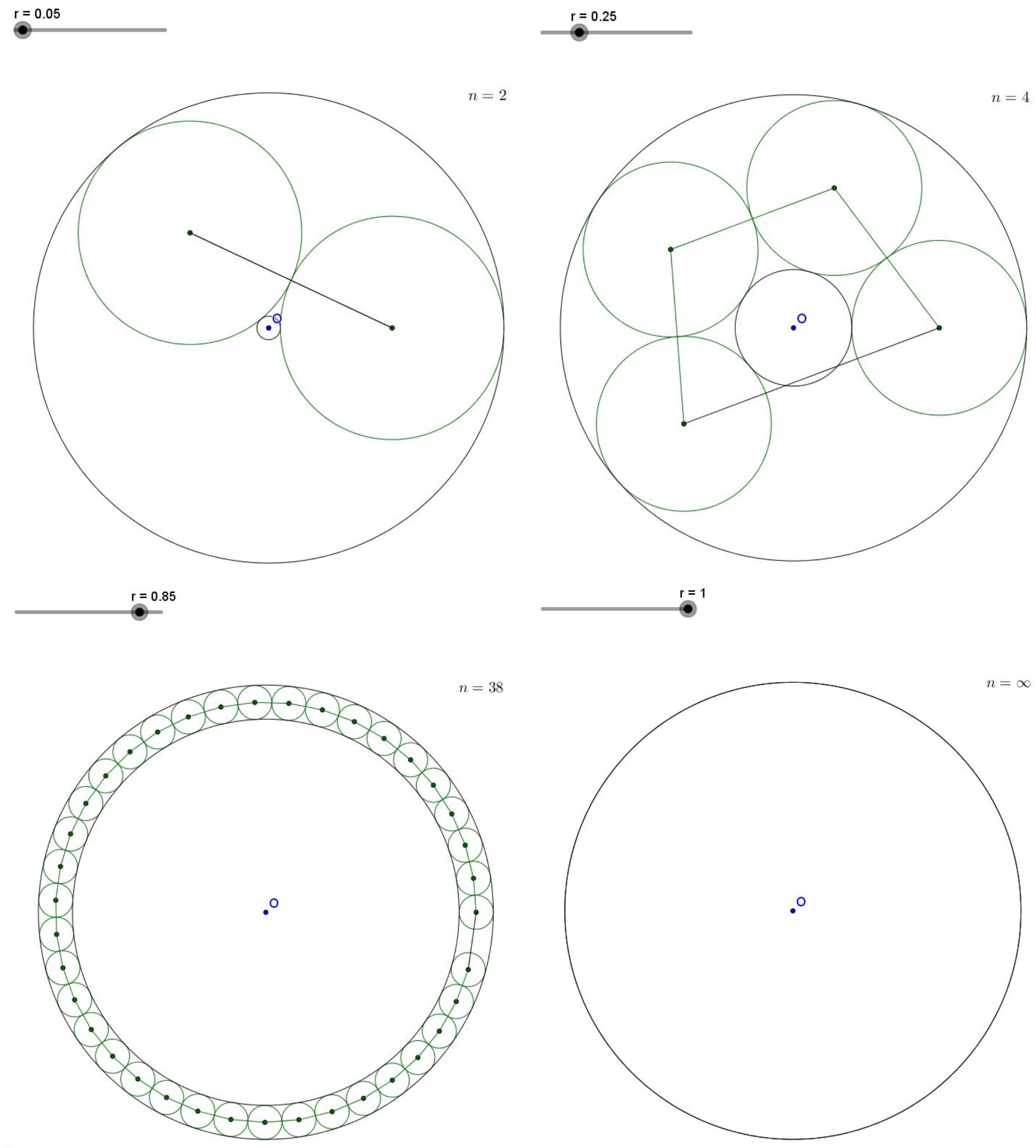


左図により，
描く円の半径は $\dfrac{1-r}{2} = AB$
$OA = \dfrac{1+r}{2}$
$\angle AOB = \theta$ とすると，$\sin\theta = \dfrac{1-r}{1+r}$
できるだけ多くの円を n 個とすると，
Gauss 記号 [] を用いて，
$n = \left[\dfrac{2\pi}{2\theta}\right] = \left[\dfrac{\pi}{\theta}\right]$
だから，
$f(r) = 2\pi\dfrac{1-r}{2}\cdot n = \pi(1-r)\cdot n$
よって，$n = \dfrac{f(r)}{\pi(1-r)}$

Gauss 記号の挟み撃ちは結構用いられる，
$n \leqq \dfrac{\pi}{\theta} < n+1$ から $\dfrac{\pi}{\theta} - 1 < n \leqq \dfrac{\pi}{\theta}$
上の n を代入して，$\dfrac{\pi}{\theta} - 1 < \dfrac{f(r)}{\pi(1-r)} \leqq \dfrac{\pi}{\theta}$ よって，$\pi^2\dfrac{1-r}{\theta} - \pi(1-r) < f(r) \leqq \pi^2\dfrac{1-r}{\theta}$
さあ，$\dfrac{1-r}{\theta}$ の極限がわかれば終わりだ。$\sin\theta = \dfrac{1-r}{1+r}$ だから，

$$\frac{1-r}{\theta} = (1+r)\frac{\frac{1-r}{1+r}}{\theta} = (1+r)\frac{\sin\theta}{\theta} \to 2 \quad (r\to 1-0 \text{ のとき}, \theta \to 0)$$

はさみうちの原理により，答は $2\pi^2$



　変化する様子は上のよう。
$r = 1$ のときの，$n = \infty$ は曖昧だが，直径が 2π の円周の長さとして $2\pi^2$ は納得がいく。
面積では 0 になってしまいそうだし，いい問題だ。