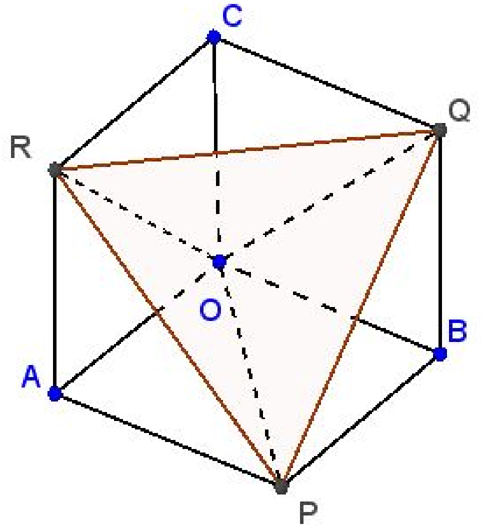
ねじれ七面体の体積

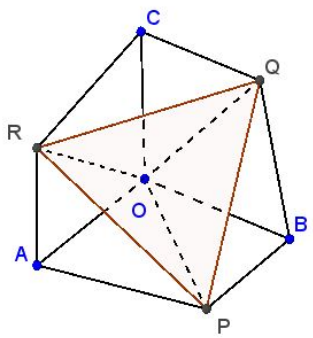
20　医科歯科
t を正の実数とし，xyz 空間において，7 つの点 O$(0,0,0)$,A$(1,0,0)$,B$(0,1,0)$,C$(0,0,1)$,
P$(t,1,0)$,Q$(0,t,1)$,R$(1,0,t)$ をとる。
(1) $t=1$ のとき，四面体 OPQR の体積を求めよ。
(2) △PQR,△APR,△BQP,△CRQ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積を
V_1 とする。 V_1 を t を用いて表わせ。
(3) O を中心とし，OP を半径とする球の体積を V_2 とする。
t を変化させるとき，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。

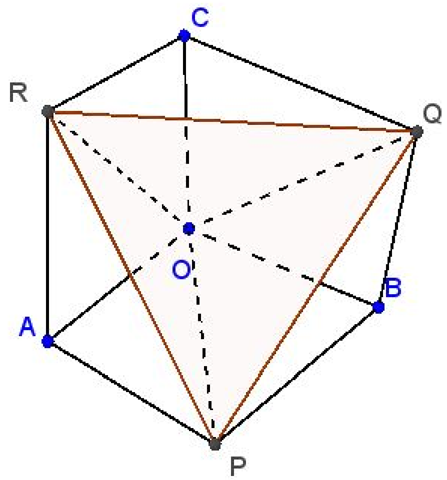
(1)



立方体から 4 隅の三角錐を切り取ればいいので,
$1-4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{3}$
あるいは，原点と平面 $x+y+z=2$ との距離を $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
と計算しておいて,
1 辺 $\sqrt{2}$ の正三角形を底辺とし,
$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$
Geogebaって，隠線処理がいいよな。
何故こんなかんたんな問題をと思いきや,
(2) のヒントとせよというメッセージなんだな。

(2) どう計算するかと迷うところだが,「入試問題，迷ったら前を見よ」ということで,
(1) を使うぞと決心する。
四面体 OPQR と，四面体 QOCR と合同な 3 個をあわせたものの
体積が V_1 なので,
まず，四面体 OPQR は (1) と同様に，三角形 PQR を底面とし，
高さは，原点と平面 PQR との距離として
$QR=\sqrt{CQ^2+CR^2}=\sqrt{t^2+1^2+(1-t)^2}=\sqrt{2(t^2-t+1)}$
平面は $x+y+z=t+1$ だから,
$V_1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}QR^2\cdot\dfrac{t+1}{\sqrt{3}}+3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\triangle CRO\cdot CQ$
$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}2(t^2-t+1)\cdot\dfrac{t+1}{\sqrt{3}}+3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot t$
$=\dfrac{t^3+1}{6}+\dfrac{t}{2}=\dfrac{t^3+3t+1}{6}$
図は $t<1$ のときであるが， $t>1$ のときも同様（次の図)。





(3) $V_2=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{1+t^2}^3$ だから，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{t^3+3t+1}{6}}{\frac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{1+t^2}^3}=\dfrac{1}{8\pi}\dfrac{t^3+3t+1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ これは正なので,

$f(t)=\dfrac{(t^3+3t+1)^2}{(1+t^2)^3}$ とおいて，$f(t)$ が最大となる t の値を求めればよい。

$f'(t)=\dfrac{2(t^3+3t+1)(3t^2+3)(1+t^2)^3-3(1+t^2)^2\cdot2t(t^3+3t+1)^2}{(1+t^2)^6}$

$=\dfrac{6(t^3+3t+1)}{(1+t^2)^4}\{(1+t^2)^2-t(t^3+3t+1)\}=-\dfrac{6(t^3+3t+1)}{(1+t^2)^4}(t^2+t-1)$

t	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
f'		$+$	0	$-$
f		↗	最大	↘

よって，求める t の値は $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

余白に図を 3 つ並べておくか,