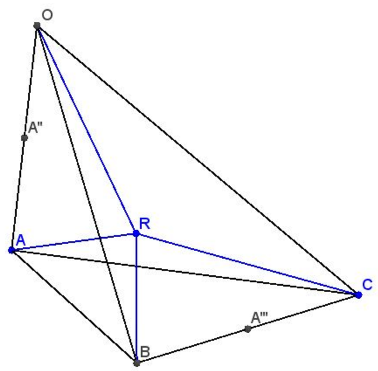
等面四面体

20 九州
四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。
$\ell \perp m, m \perp n, n \perp \ell$ であり，AB=$\sqrt{5}$，BC=$\sqrt{3}$，CA=2 のとき，以下の問いに答えよ。
(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。
(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

A($\vec{a}$),B($\vec{b}$),C($\vec{c}$) とする。
また，OA,OB,OC,BC,CA,AB の中点をそれぞれ A",B",C",A"',B"',C"' とする。（後で A',B',C' が出てくる）
A"A"',B"B"',C"C"' がそれぞれ直交するので，
$\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\dfrac{\vec{a}}{2}, \dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\dfrac{\vec{b}}{2}, \dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}-\dfrac{\vec{c}}{2}$ のそれぞれ 2 つの内積が 0。
$(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})=(\vec{c}+\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-(\vec{b}-\vec{a}))=\left|\vec{c}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=0$ より，
AB=$\sqrt{5}$ を代入するのを我慢して，AB=c としておいて，
$\left|\vec{c}\right|=c$ 同様に，$\left|\vec{a}\right|=a, \left|\vec{b}\right|=b$ これで，面 4 つがすべて同じとわかり，**等面四面体**と名付けたわけ。

(1) $2\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2+b^2-c^2\cdots$①$, 2\vec{b}\cdot\vec{c}=b^2+c^2-a^2\cdots$②$, 2\vec{c}\cdot\vec{a}=c^2+a^2-b^2\cdots$③

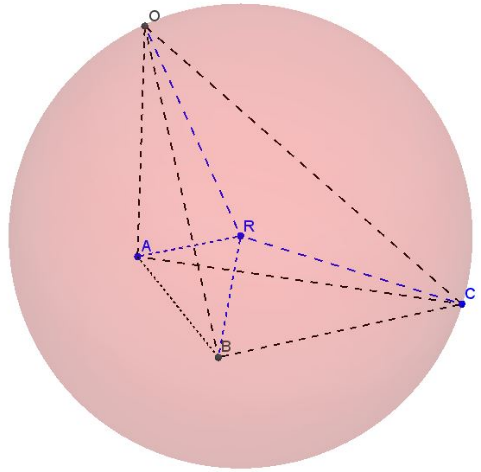


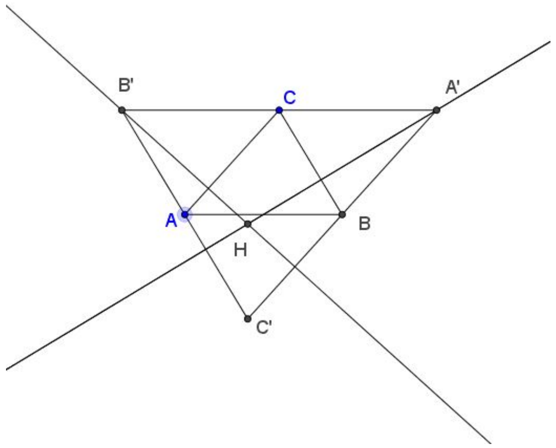
この問題では，$2\vec{a}\cdot\vec{b}=3+4-5=2, 2\vec{b}\cdot\vec{c}=4+5-3=6, 2\vec{c}\cdot\vec{a}=5+3-4=4$ より，
$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$
2 つのベクトルのなす角を θ' とすると $2^2\cos\theta'=-2$
つまり，$\cos\theta'=-\dfrac{1}{2}, 0 \leqq \theta' \leqq \pi$ より，$\theta'=\dfrac{2}{3}\pi$
よって，2 つの直線のなす角 θ は
$\theta=\pi-\theta'=\pi-\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}$

(2) これからが，等面四面体の性質。具体的な数値を使わずに証明しておこう。
A"A"',B"B"',C"C"' の中点はすべて，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$ つまり，上の直交する 3 直線 ℓ, m, n は一点で交わる。
実はこれが四面体の外接球の中心。これを R とおくと，RA"⊥ OA つまり RO=RA
何故なら，$\overrightarrow{\mathrm{RA"}}\cdot\vec{a}=\left(\dfrac{\vec{a}}{2}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\right)\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{4}\{\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{4}\{\left|\vec{a}\right|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}\}$
ところで，$\dfrac{①+③}{2}$ より，$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a^2$
同様に，RO=RA=RB=RC つまり，R は四面体 OABC の外接円の中心。
半径は $\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}\right|=\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2+2(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b})}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
何故なら，① + ② + ③ より，$2(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b})=a^2+b^2+c^2$

この問題では，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+4+5}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

正四面体では明らかだが，等面四面体でも，四面体の位置の中心（4 点の位置ベクトルの平均）は外接球の中心である，ということだ。
で，その外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
等面四面体は，上のように対辺の中点を結ぶ線分は互いに直交し，その中点が位置の中心。





さらに，各辺に平行な対する点を通る直線で作られる三角形（平行三角形と名付けるか）を考えると，平行三角形の垂心が O から平面 ABC におろした垂線の足となる。だから，体積も計算できるはず。すると，(計算が複雑そうなので，ちょっとやめておくが) 内接球の半径もでる。

垂心と等面四面体の問題は前にもあった。

15 年東北
$t>0$ を実数とする。
座標平面において，3 点 A$(-2,0)$,B$(2,0)$,P$(t,\sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。
(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
(3) 辺 AB,BP,PA の中点をそれぞれ M,Q,R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ,QR,RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

(1) $\angle APB$ が直角になる場合，$OP=2t=OA=2$ つまり $t=1$ と $\angle ABP$ が直角になる場合，つまり $t=2$ の間で，$1<t<2$
(2) $t=1$ と A を通る BP（$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\sqrt{3}t)$）に垂直な直線との交点。
$\begin{cases} t=1 \\ (t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0 \end{cases}$ を解いて，$\left(t, \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$
さあ，何故垂心を求めさせたかわかるでしょう？
(3) A,B,P が合ってできる頂点を C とすると CH が高さということ。

求める体積は　$\frac{1}{3}\frac{1}{4}\triangle ABQ\sqrt{MC^2-MH^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}4\sqrt{3}t\right)\sqrt{2^2-\left\{t^2+\left(\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2\right\}}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{-t^4+5t^2-4}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\leqq\frac{1}{3}\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$1<t=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}<2$ より，これが最大値。