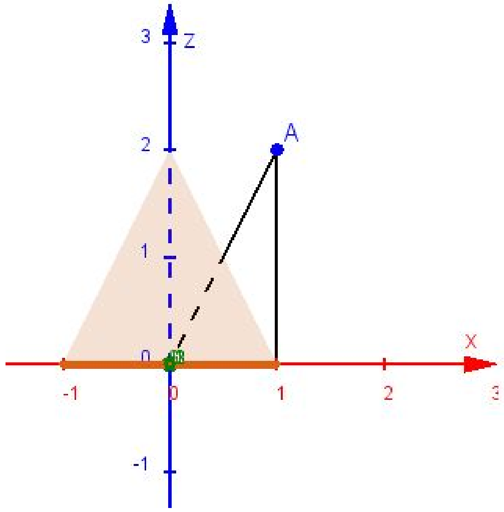
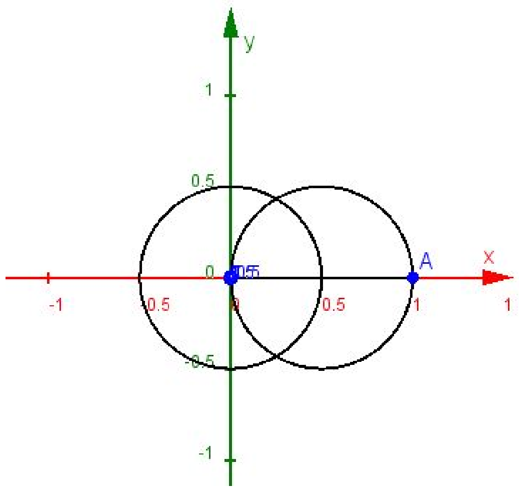
円錐を見込む立体

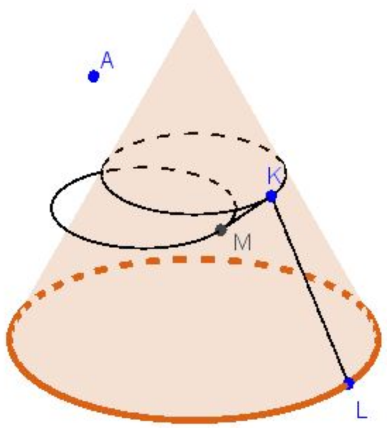
20 東大
　座標空間において， xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。
この円を底面とし，点 (0,0,2) を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。
また，点 A(1,0,2) を考える。
(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。
平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。
(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。



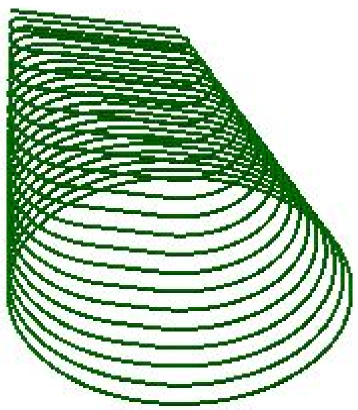


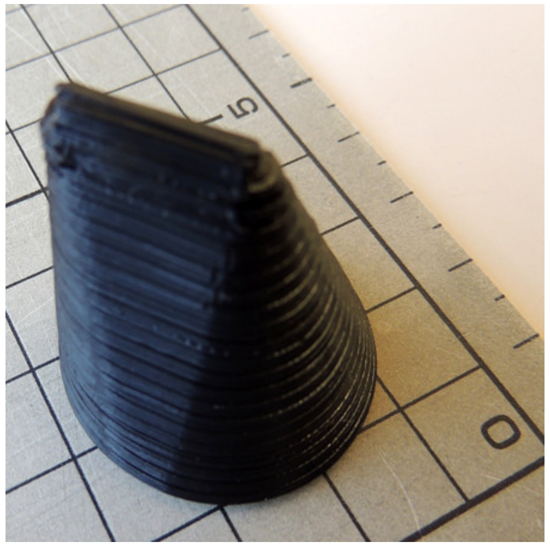
(1) 錐の性質により，底面に平行な面による切り口の図形は底面に相似な円。相似比 1:2 により半径は $\frac{1}{2}$ 。

(2) 右図の母線 KL が平面図の KM に対応することに注意する。
求める立体の平面 $z=1$ による断面積は，半径 $\frac{1}{2}$ の円を $\frac{1}{2}$ 平行移動して考えると，円と長方形を加えて
$\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$。
真ん中で切った切り口を考えさせているということは，シンプソンの公式。
（$\frac{\text{高さ}}{6}$｛上面の面積＋下底の面積＋4･中面の面積｝）
よって，求める体積は
$$\frac{2}{6}\left\{0+\pi+4\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{2}{3}(\pi+1)$$
5 分くらいでできるけど，これで何点もらえるかな？



　積分計算の解答はそこらにあると思うので，後回しにして，この立体見てみよう。そして，触ってみよう。こんな感じ。そう面白くないか。





　じゃあ理論付けすると，今どきはベクトルでやるほうが普通かなと思いつつも，
A$(1,0,2)$,P(x,y,z) を通る直線の方程式は $\frac{X-1}{x-1}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-2}{z-2}\cdots$①
ここで，$z=0,Z=1$ とすると，$\frac{X-1}{x-1}=\frac{Y}{y}=\frac{1-2}{0-2}$ つまり $X=\frac{1}{2}(x+1), Y=\frac{1}{2}y$
底面の円は $x^2+y^2=1$ より，$(2X-1)^2+(2Y)^2=1$ つまり $(X-\frac{1}{2})^2+Y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
母線は $(0,1,0),(0,\frac{1}{2},1)$ を通る直線 $x=0, \frac{y-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{z}{1-0}$ つまり $y=-\frac{1}{2}(z-2)(0\leqq z\leqq 1)$
①で，$x=0,Z=1$ とすると，$\frac{X-1}{-1}=\frac{Y}{y}=\frac{1-2}{z-2}$ で $Y=\frac{1}{2}, X=\frac{1}{z-2}+1(0\leqq X\leqq\frac{1}{2})$

　積分の方もちゃんとやると，$z=k$ のときの切り口の面積は，半径 $1-\frac{k}{2}$ の円が $\frac{k}{2}$ ずれて，
$\pi\left(1-\frac{k}{2}\right)^2+2(1-\frac{k}{2})\cdot\frac{k}{2}=\pi\left(1-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k(2-k)}{2}$
よって，求める体積は
$$\int_0^2\left\{\pi\left(1-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k(2-k)}{2}\right\}dk=\left[-\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{k}{2}\right)^3\right]_0^2+\frac{2^3}{2\cdot 6}=\frac{2}{3}(\pi+1)$$