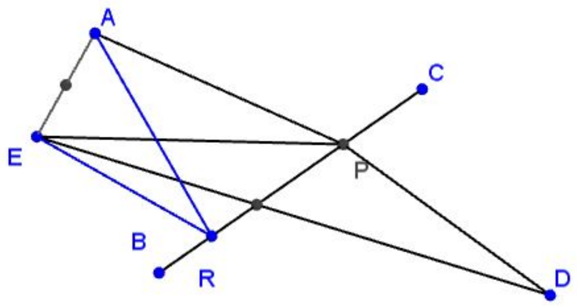
再び距離の和の最小　Fermat Point

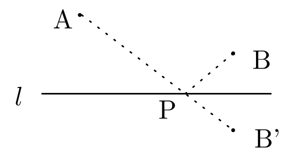
20 同志社
xyz 空間に 4 点 A$(0,0,1)$,B$(1,0,0)$,C$(0,2,0)$,D$(2,2,0)$ をとる。
また，点 P は線分 BC 上を動き，BP:PC$=t:(1-t)$　$(0<t<1)$ とする。
このとき，次の問いに答えよ。
(1) 点 P の座標を t を用いて表せ。
(2) 点 A から線分 BC におろした垂線を AR とする。点 R の座標を求めよ。
また，線分 AR の長さを求めよ。
(3) 点 E$(p,q,0)$ は xy 平面上にあり，$q<0$ とする。
さらに，直線 ER と直線 BC は垂直に交わり，線分 ER と線分 AR は長さが等しいとする。
このとき，点 E の座標を求めよ。
(4) 線分 AP と線分 PD の長さの和の最小値を求めよ。また，そのときの点 P の座標を求めよ。

後にあるように，距離の和は対称点を作るのがいい。空間の直線上の点を結ぶ線分の距離の和の問題。
ヒントに従えばいいだけだが。
(1) B$(1,0,0)$C$(0,2,0)$ を $(1-t):t$ に内分する点 P は，$(1-t,2t,0)$
(2) s を実数として，BC 上の点だから，R$(1-s,2s,0)$ とおけて
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-s,2s,-1),\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,2,0),\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より $-1+s+4s=0$ これをといて，$s=\frac{1}{5}$
よって，R$\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},0\right)$,$\left|\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right|=\left|(\frac{4}{5},\frac{2}{5},-1)\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{ER}}=(\frac{4}{5}-p,\frac{2}{5}-q,0),\overrightarrow{\mathrm{ER}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より $-\frac{4}{5}+p+2\frac{2}{5}-2q=0$ これより，$p=2q$
$\left|\overrightarrow{\mathrm{ER}}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}$ これと連立して $q<0$ も考慮して解くと， $p=-\frac{2}{5},q=-\frac{1}{5}$ で，E$(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},0)$
(4) これが求める対称点。$AP+PD=EP+PD\geqq ED=\sqrt{(2+\frac{2}{5})^2+(2+\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{265}}{5}$
P は ED$(y=\dfrac{-\frac{1}{5}-2}{-\frac{2}{5}-2}(x-2)+2$ つまり $y=\frac{11}{12}x-\frac{1}{6})$ と BC$(x+\frac{y}{2}=1)$ の交点
P$(\frac{22}{35},\frac{26}{35},0)$



$\triangle AEB\perp BC$
AE の垂直 2 等分面が BC を含む。

距離の和の最小についての有名なクイズから。
右の図の牛 A が川 l の水を飲んでから，乾草 B を食べに行く。
最短で行く方法は？



解）B の l に関して対称な点を B' とすると，
$AP+BP=AP+B'P\geqq AB'$ ということで，
距離の和の最小の問題は「対称点を上手く使う」

さて，問題は公立（になった途端に問題が難化したな ∵ そんなもんか）諏訪理科大。

19 公立諏訪理科大
3 点 A$(0,1,0)$,B$(0,0,1)$,P(x,y,z) $(x>0)$ があり，O を原点とするとき，以下の問いに答えよ。
(1) △ PAB の面積を求めよ。
(2) x と実数 t を固定する。$y+z=t$ であるとき，△ POA,△ POB の面積の和が最小となる y,z を t を用いて表わせ。
(3) 4 面体 POAB の体積が $\frac{1}{6}$ となる範囲を動くとき，4 つの面積の総和が最小となるときの x,z,z の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}$ より
△ PAB$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\{x^2+(y-1)^2+z^2\}-(1-y+z)^2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+(y-1)^2+z^2+2(y-1)z}=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+(y-1+z)^2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ より
△ POA+△ POB $=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}$
$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-z^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}\right)$

ここからです。C(x,y),D(x,z),D'$(-x,-z)$ とすると，
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}=OC+OD=OC+OD'\geqq CD'=\sqrt{4x^2+(y+z)^2}=\sqrt{4x^2+t^2}$
等号は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}//\overrightarrow{\mathrm{OD'}}$ つまり，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}//\begin{pmatrix}-x\\-z\end{pmatrix}$
$-xz=-xy$ ところで $x>0$ なので $y=z$，　ところで $y+z=t$ なので $y=z=\frac{t}{2}$

(3) 4 面体 POAB の体積で $\frac{1}{3}x$△OAB$=\frac{1}{3}x\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ より，$x=1$
よって，4 つの面積の総和は
△ PAB+△ POA+△ POB +△OAB$=\frac{1}{2}\sqrt{2+(t-1)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{4+t^2}+\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+(t-1)^2}+\sqrt{4+t^2}+1\right)$
変数が一つで 2 つの距離の和くらいなので微分してもいいが，

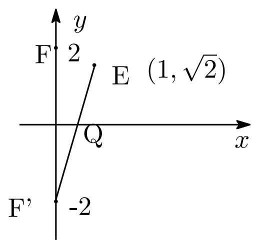
ここもです。Q$(t,0)$,E$(1,\sqrt{2})$,F$(0,2)$,F'$(0,-2)$ とすると

$\sqrt{2+(t-1)^2}+\sqrt{4+t^2}=EQ+FQ=EQ+F'Q\geqq EF'$

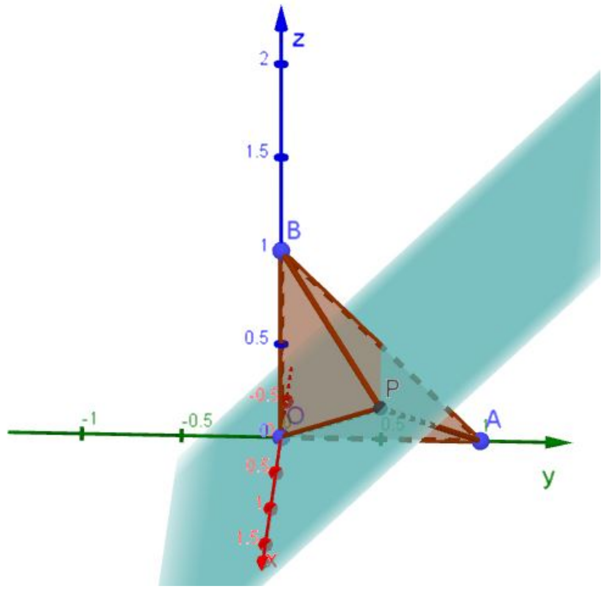
等号成立は Q が EF' と x 軸の交点となるときで，

Q は EF' を $\sqrt{2}:2=1:\sqrt{2}$ の内分する点

$t=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$



以上より $x=1, y=z=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$



(3) を解くだけなら，対称性により $y=z$，P$(1,t,t)$ とおいて

$\dfrac{1}{2}\sqrt{2+(2y-1)^2}+\sqrt{1+y^2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{y^2+1}$ の

最小を左のように求めれば出る。

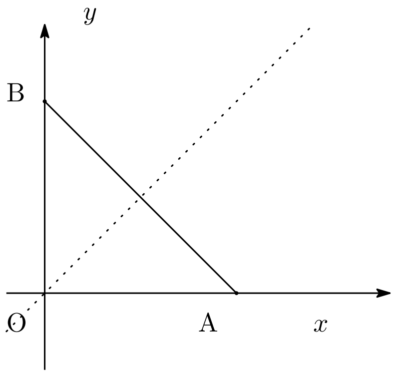
2 つの距離の和の最小は微分してもできるが，3 つの距離の和の最小は複雑になりすぎる。

で，この問題が「Fermat Point」

> **96 御茶の水**
>
> xy 平面上の 3 点 O$(0,0)$,A$(1,0)$,B$(0,1)$ からの距離の和 $OP+AP+BP$ を最小にする点 P を求めよ。

88 鹿児島でも類題が出題されたようです。

普通（だと思う）の解答。



求める点は三角形の内部の点としていいだろう。

また，対称性から，P は直線 $y=x$ 上にある。

（このへんが普通と言った理由）

つまり，P(x,x) とすると，$0<x<1$ で

$AP+OP+BP=\sqrt{2}x+2\sqrt{(x-1)^2+x^2}$

この x の関数 $f(x)$ の最小値を求めればいい。

微分して，$f'(x)=\sqrt{2}+\dfrac{2\{2(x-1)+2x\}}{2\sqrt{(x-1)^2+x^2}}=\sqrt{2}+\dfrac{2(2x-1)}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$

これを 0 とおくと

$-2(2x-1)=\sqrt{2(2x^2-2x+1)}$

左辺は正から $x<\dfrac{1}{2}$ のもとで，

2 乗しても同値で $6x^2-6x+1=0$

$x<\dfrac{1}{2}$ より，$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$

増減表をかいて

x	0		$\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	最小	↗	

よって，求める点 P は $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$

さて別（普通でない？）解は幾何を使った解答。

「三角形の 3 頂点からの距離の和が最小になる点は，**フェルマー点**といわれ有名である。」

を知って（証明まで含めて）いれば，以下のような解答もできる。

三角形内部の点 P をとり，

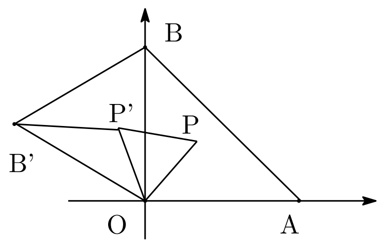
P と B を原点の周りに

時計と反対方向に 60° 回した点を P',B' とする。

（こんなことができるのは，

フェルマー点の存在証明を知っているからだ）

すると，$AP+OP+BP=AP+PP'+P'B'\geqq AB'$



$\triangle OB'P'\equiv\triangle OBP$

$B'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ より，

求める点 P は，直線 $y=x$ と A,B' を通る直線との交点としても計算できる。

というわけで，フェルマー点を高校生に解けるくらい条件をつけた問題でした。
実はこの問題（一般的なフェルマー点）は「解析概論」の練習問題にあるんですよね。2 章微分法の練習問題の最後。これが解けなくて放ってあったんだな。

> 三角形 ABC の平面上で，三つの頂点からの距離の和が最小である点を求めること。
> 三角形の内部の点と三つの頂点との距離の和は最も長い二辺の和よりも小である。
> [解]（最小の場合）各角が 120° よりも小であるときは，求める点は三角形の内部にあって，その点から各辺を見込む角が 120° に等しい。一つの角が 120° 以上ならば，その角の頂点が求める点である。
> [注意] 微分法によって解き，初等幾何学的の解法と比較するとよい。

A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),P(x,y) とすると，
距離の和は，$f(x,y)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}+\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$
2 変数だから偏微分して，
$\dfrac{x-x_1}{AP}+\dfrac{x-x_2}{BP}+\dfrac{x-x_3}{CP}=0,\ \dfrac{y-y_1}{AP}+\dfrac{y-y_2}{BP}+\dfrac{y-y_3}{CP}=0$ が必要。
ここで止まっていたのだが，
$\begin{pmatrix}\dfrac{x-x_1}{AP}\\ \dfrac{y-y_1}{AP}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{x-x_2}{BP}\\ \dfrac{y-y_2}{BP}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{x-x_3}{CP}\\ \dfrac{y-y_3}{CP}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ つまり $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{AP}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{BP}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{CP}=\overrightarrow{0}$
大きさ 1 の 3 つのベクトルの和が点。よって，各ベクトルのなす角は 120°。
極値がここだけとすると，最大値は境界。境界での最大値は最も長い 2 辺の和。
下の図が初等幾何学的な解法（左参照）。