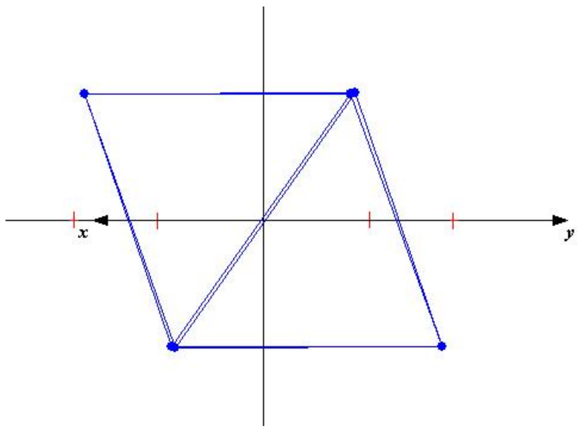
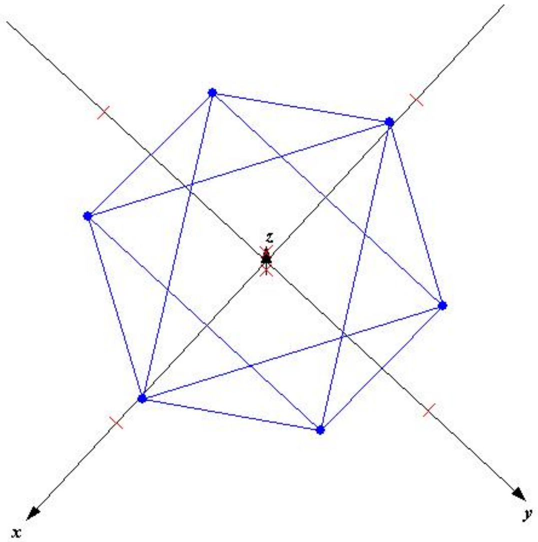
回転する正八面体

東大では過去に，正四面体を２つつなげる問題がありました。次は正八面体だろう。と思っていると，その通り出ましたね。正四面体を上から見ると上の頂点と底面の重心が一致しますが，正八面体でも上から見ると上面と底面の三角形の重心が一致します。これを証明するのが (1)，中学生でもできるはず。ところで中学生は教科書を見ると１年生で正多面体をやるんですね。空間図形は３次元ですから，見取り図はゆがんでます（見たとおりの図)。それを２次元で見るために，平面図・正面図・側面図を使うわけです。あとは，問題にあった切断面をかけばいい。





(2) がこれを回転したもの。対称性により八面体の辺が重心をつなぐ軸（底面に垂直）の周りに回るときの回転体の体積を求めればいい。これが，一葉双曲面となります。で，今回のテーマはこれ。

軸の周りに回るので結局軸に垂直な平面で切ったときの形は円。

上の点の座標を $P(r\cos t, r\sin t, h)$，下の点の座標を $Q(r\cos(t+s), r\sin(t+s), -h)$ としてこいつ（直線 PQ ）を回転しよう。

直線 PQ の方程式は（これが前の教育課程ではしっかりあった，今はベクトルでやることになる。）

$$\frac{x-r\cos t}{r\cos(t+s)-r\cos t}=\frac{y-r\sin t}{r\sin(t+s)-r\sin t}=\frac{z+h}{h+h}$$

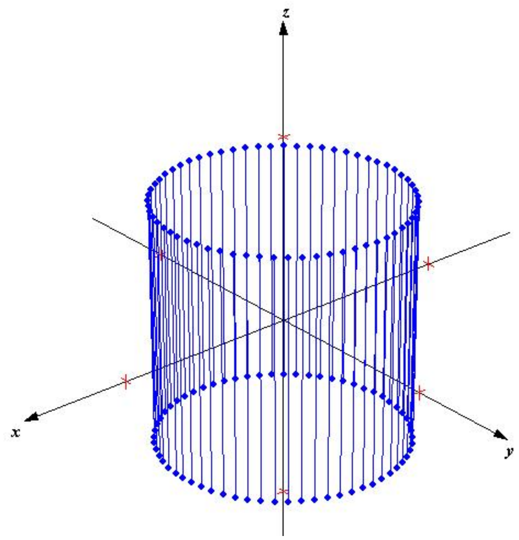
体積 V を計算するには x^2+y^2 を計算する必要があり，

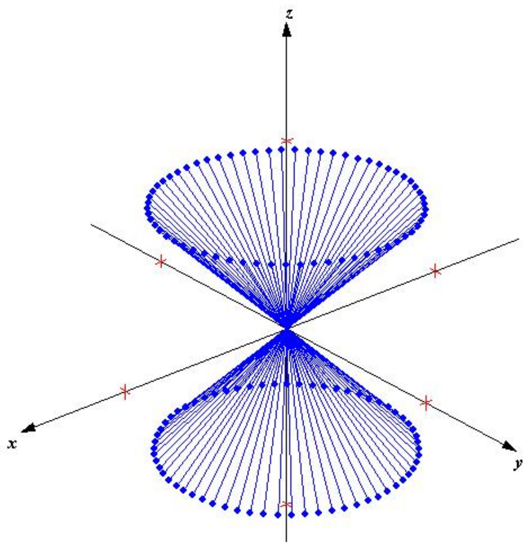
$$x^2+y^2=\frac{(1+\cos t)h^2+(1-\cos t)z^2}{2}$$

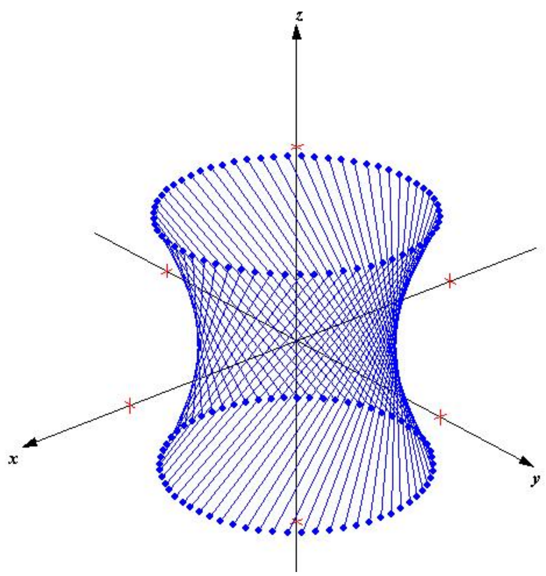
x^2+y^2-（定数）$z^2=$（定数）となり，これが x （ y ）が定数だと y （ x ）と z の双曲線なので，**一葉双曲面**という。

これを用いて $V=2\pi\int_0^h (x^2+y^2)dz=\frac{2}{3}\pi r^2 h(2+\cos s)$ と見事に計算されます。

t が 0 のとき体積最大（$2\pi r^2 h$）の円柱，t が π のとき体積最小（$\frac{2}{3}\pi r^2 h$）の円錐２つ。t が $\frac{\pi}{2}$ のとき体積（$\frac{4}{3}\pi r^2 h$）の一葉双曲面（$h=r$ のときは球と同じ体積）。







東大の問題は

$r=\frac{\sqrt{3}}{3}, h=\frac{\sqrt{6}}{6}, t=\frac{\pi}{3}$

なので，答は $\frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$

図では内側も見えていますが。