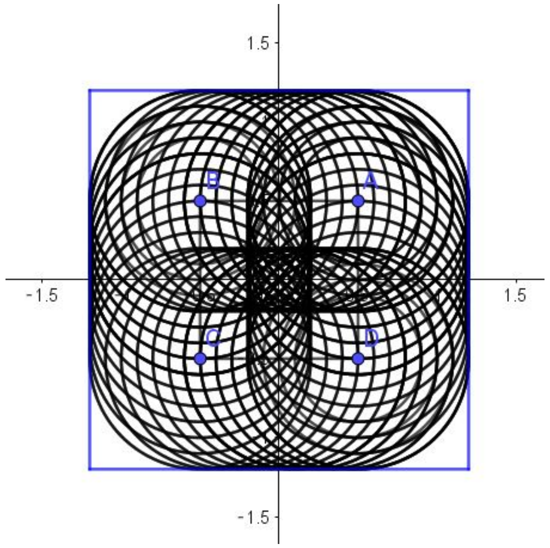
動く球の通過領域

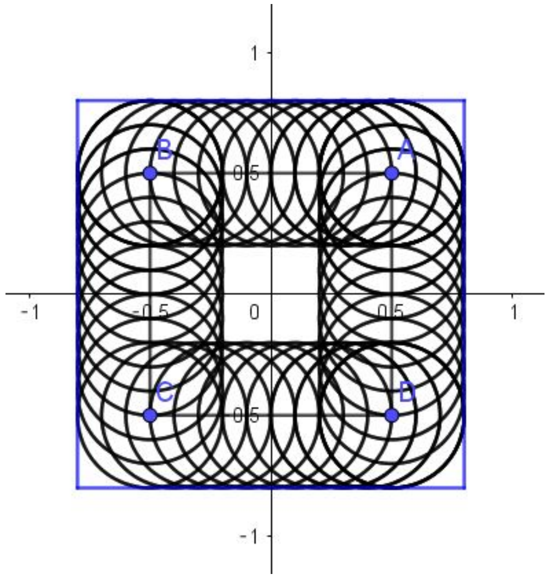
19　富山

(1) 平面上の，1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P が正方形 ABCD の辺の上を 1 周するとき，点 P を中心とする半径 r の円（内部を含む）が通過する部分の面積 $S(r)$ を求めよ。

(2) 空間上の，1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P が正方形 ABCD の辺の上を 1 周するとき，点 P を中心とする半径 1 の球（内部を含む）が通過する部分の体積 V を求めよ。

こういう次元だけ上げる問題好きです。





(1) 真ん中が抜けるかどうかで，まず， r の場合分けが必要。

外側の正方形の面積から $\left\{2\left(\frac{1}{2}+r\right)\right\}^2$ から，四隅の欠け　$4\left(r^2-\frac{\pi}{4}r^2\right)$ を引き，

内側があるときは，内側の正方形の面積 $\left\{2\left(\frac{1}{2}-r\right)\right\}^2$ を引けばいい。

(i) $\frac{1}{2}<r$ のとき，

$S(r)=\left\{2\left(\frac{1}{2}+r\right)\right\}^2-4\left(r^2-\frac{\pi}{4}r^2\right)=\pi r^2+4r+1$

(ii) $0<r\leqq\frac{1}{2}$ のとき，

$S(r)=\left\{2\left(\frac{1}{2}+r\right)\right\}^2-4\left(r^2-\frac{\pi}{4}r^2\right)-\left\{2\left(\frac{1}{2}-r\right)\right\}^2=(\pi-4)r^2+8r$

(2) $z=t$ の断面を考えて，半径 $\sqrt{1-t^2}$ の円となるので，求める体積は上下対称なので

$$2\left[\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left\{(\pi-4)(1-t^2)+8\sqrt{1-t^2}\right\}dt+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\pi(1-t^2)+4\sqrt{1-t^2}+1\right\}\right]=4\pi+3\sqrt{3}-\frac{16}{3}$$

(1) がなければ，こうやったかな。

(2) 4 隅を合わせて球になって，4 側面は半径 1 の円を底面とする高さ 2 の円柱で，中心は 1 辺 1 の正方形を底面とする高さ 2 の直方体。そこから真ん中のかけた部分を引けばいい。

さて，真ん中のかけた部分の上の方。$z=k$ での切断面は $\frac{\sqrt{3}}{2}<k<1$ のとき，正方形だ。

図より，その面積は，$\left\{2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right)\right\}^2=5-4k^2-4\sqrt{1-k^2}$

よって，求める体積は，$\frac{4}{3}\pi+2\pi+2-2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}(5-4k^2-4\sqrt{1-k^2})dk$

$=\frac{10}{3}\pi+2-2\left[5k-\frac{4}{3}k^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}+8\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\sqrt{1-k^2}dk$

$=\frac{10}{3}\pi-\frac{16}{3}+4\sqrt{3}+8\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\right)=4\pi+3\sqrt{3}-\frac{16}{3}$