曲線上の三角形の垂心

19　上智

座標平面において，双曲線 $C : xy = 1$ 上の異なる 3 点 P,Q,R を考える。P,Q,R の x 座標をそれぞれ p, q, r とする。△PQR の重心を G，垂心を H とする。

(1) G と H の座標を求めよ。

(2) △PQR が正三角形である場合を考える。このとき，G と H は一致する。G の x 座標を a とする。

(i) p, q, r を解に持つ 3 次方程式を求めよ。

(ii) △PQR の外接円と C が P,Q,R 以外の共有点 S を持つとき，S の x 座標を求めよ。

これも懐かしい。下の問題があったから，

09　岡山

いま，座標平面上の曲線 $K : y = \dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$,$\mathrm{B}\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$,$\mathrm{C}\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。

(1) 三角形 ABC の垂心 H は，曲線 K 上にあることを示せ。

(2) 三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ。

(1) 定義から，a, b, c は 0 ではない相異なる数である。そのもとで，

H は A を通る BC に垂直な直線と，B を通る CA に垂直な直線との交点として計算する。

BC の傾きは，$\dfrac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{b - c} = -\dfrac{1}{bc}$ だから，A を通る BC に垂直な直線は，$y = bc(x - a) + \dfrac{1}{a}$

同様に，B を通る CA に垂直な直線は，$y = ca(x - b) + \dfrac{1}{b}$ これらを連立して解くと，$\mathrm{H}(-\dfrac{1}{abc}, -abc)$

(2) $-\dfrac{1}{abc} = h$ とおけば，$\mathrm{H}\left(h, \dfrac{1}{h}\right)$ このとき，$-\dfrac{1}{abh} = c$

(1) より，$\mathrm{A}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$,$\mathrm{B}\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$,$\mathrm{C}\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$ の垂心は，$\mathrm{H}(-\dfrac{1}{abc}, -abc)$

よって，$\mathrm{A}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$,$\mathrm{B}\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$,$\mathrm{H}\left(h, \dfrac{1}{h}\right)$ の垂心は，$(-\dfrac{1}{abh}, -abh) = \left(c, \dfrac{1}{c}\right)$

　三角形の心は，3 点の対称式となるはずで，各点の y 座標が x の関数だとそれが具体的に計算できるから，こういう問題となるのだろうが，垂心が曲線上というのはよく見つけたと思う。何か他に原因があるのかな？

上の問題の解答。

(1) 重心は公式があるから楽。

$\mathrm{G}\left(\dfrac{p+q+r}{3}, \dfrac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}{3}\right)$ すなわち，$\mathrm{G}\left(\dfrac{p+q+r}{3}, \dfrac{pq+qr+rp}{3pqr}\right)$

H は上のようにして，$\mathrm{H}(-\dfrac{1}{pqr}, -pqr)$ （曲線上なんだよな）

(2)(i) $\dfrac{p+q+r}{3} = -\dfrac{1}{pqr}, \dfrac{pq+qr+rp}{3pqr} = -pqr, p+q+r = 3a$ なので，$pqr = -\dfrac{1}{a}, pq+qr+rp = -\dfrac{3}{a^2}$

よって求める方程式は，$x^3 - 3ax^2 - \dfrac{3}{a^2}x + \dfrac{1}{a} = 0$

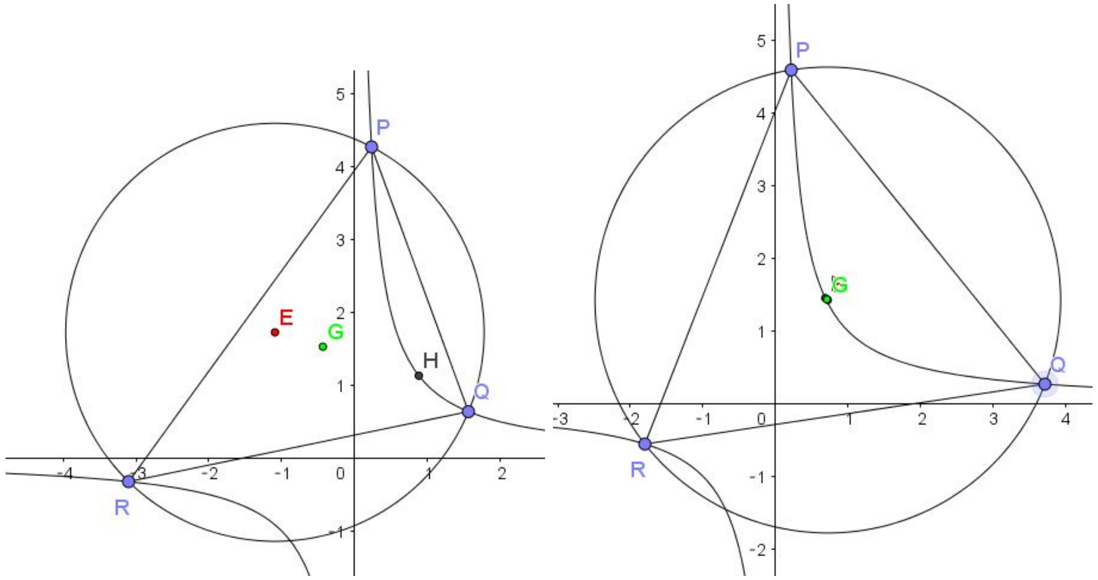
(ii) 外心は垂心と一致し $(a, \dfrac{1}{a})$， 外接円の半径を R とすると，その方程式は $(x-a)^2 + (y - \dfrac{1}{a})^2 = R^2$

求めたい S の x 座標を s とおくと，s は，これと $y = \dfrac{1}{x}$ を連立した方程式の解だから，次の方程式の解。

$(x-a)^2 + (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a})^2 = R^2$ つまり $a^2x^2(x-a)^2 + (a-x)^2 = a^2x^2R^2$ 整理して，$a^2x^4 - 2a^3x^3 + \cdots = 0$

解と係数の関係により，$p+q+r+s = 2a$ よって，$s = 2a - (p+q+r) = -a$

下の図のようなことですかね。H 垂心，G 重心，ついでに E 外心です。



　で，曲線を変えてみて，しかも変わった問題にしてみた。どぞ。

座標平面において，双曲線 $C : y = x^2$ 上の異なる 3 点 P,Q,R を考える。P,Q,R の x 座標をそれぞれ p, q, r とする。

(1) △PQR の重心 G，垂心 H，外心 E の座標を $p+q+r = a, pq+qr+rp = b, pqr = c$ で表わせ。

(2) P,Q の座標をそれぞれ $(-1, 1), (2, 4)$ として，R を C 上で動かすとき，G,H,E の軌跡を求めよ。

(1) $\mathrm{G}\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a^2-2b}{3}\right)$,$\mathrm{H}(a(b+1)-c, -b-1)$,$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}(c-ab), \dfrac{1}{2}(a^2-b+1)\right)$

（これから，G は HE を $2:1$ に内分する点というのもわかる）

(2)$\mathrm{R}(t, t^2)$ とすると，$a=-1+t+2=t+1, b=-2+2t-t=t-2, c=-2t\,(t \neq -1, 2)$

$\mathrm{G}\left(\dfrac{t+1}{3}, \dfrac{(t+1)^2-2(t-2)}{3}\right)$,$\mathrm{H}((t+1)(t-1)+2t, -t+1)$,$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}\{-2t-(t+1)(t-2)\}, \dfrac{1}{2}((t+1)^2-t+3)\right)$

つまり，$\mathrm{G}\left(\dfrac{t+1}{3}, \dfrac{t^2+5}{3}\right)$,$\mathrm{H}(t^2+2t-1, -t+1)$,$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}(-t^2-t+2), \dfrac{1}{2}(t^2+t+4)\right)$

$\mathrm{G}(x, y)$ とすると，$x=\dfrac{t+1}{3}, y=\dfrac{t^2+5}{3}$ ，t を消去して，$y=\dfrac{(3x-1)^2+5}{3}=3x^2-2x+2\,(x \neq 0, 1)$

$\mathrm{H}(x, y)$ とすると，$x=t^2+2t-1, y=-t+1$ ，t を消去して，

$y=(1-y)^2+2(1-y)-1=y^2-4y+2\,(y \neq -1, 2)$

$\mathrm{E}(x, y)$ とすると，$y=-x+3\,(x \leqq \dfrac{9}{8}, x \neq 1, -2)$