通過領域　再び

19　慶應

点 (x, y) は，任意の実数 θ_1, θ_2 に対して，次の式をみたしている。

$$\begin{cases} x = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \\ y = \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 \end{cases}$$

このとき，xy 平面において点 (x, y) の存在しうる領域を求め，その面積を求めよ。

これが懐かしい。昔 $(\sin\theta_1 + \sin\theta_2, \sin 3\theta_1 + \sin 3\theta_2)$ の通過領域という問題があった。

穴埋めの問題だが，記述式だと少し厄介だ。やり方はいろいろありそうだが，泥臭く変数消去でいくか。

$\cos\theta_2 = x - \cos\theta_1$ として，θ_2 を消去しよう。

$-1 \leqq \cos\theta_2 = x - \cos\theta_1 \leqq 1, -1 \leqq \cos\theta_1 \leqq 1$ より $-1 + \cos\theta_1 \leqq x \leqq 1 + \cos\theta_1 \cdots$①

$\cos\theta_1$ の変域は $Max(-1, x-1) \leqq \cos\theta_1 \leqq Min(1, x+1) \cdots$②

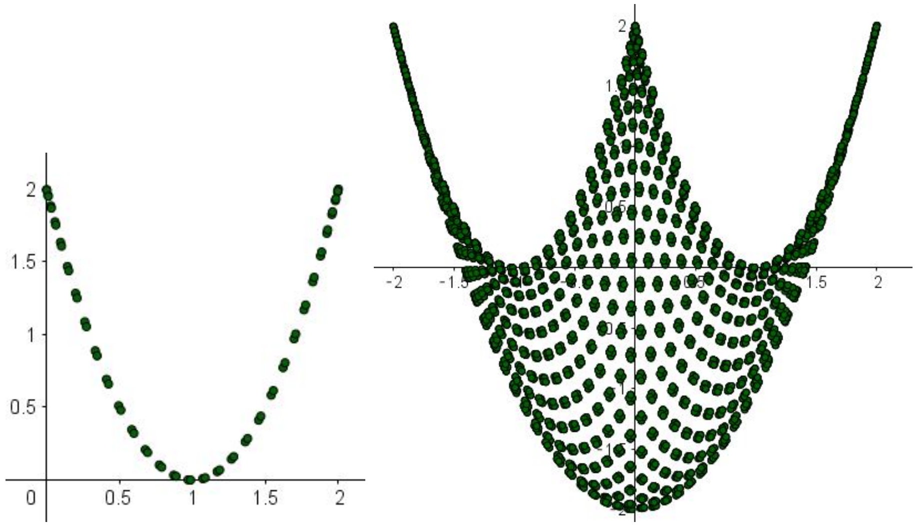
ただし，$Max(a, b), Min(a, b)$ は，それぞれ a, b の小さくない方，大きくない方を表す。

$y = 2\cos^2\theta_1 + 2\cos^2\theta_2 - 2 = 2(x - \cos\theta_1)^2 + 2\cos^2\theta_1 - 2 \cdots$③

つまり，頂点 $(\cos\theta_1, 2\cos^2\theta_1 - 2)$ の放物線の① の部分。

で，θ_1 を動かしてその通過領域を求めればいい。

Geogebra は，二重ループを自動でさせるのはちょっと複雑なので（プログラミングできるんだろうか），リストを使って，片方を Sequence で表すといい。で，その図形をスライダーで動かす。



その１（**解析的方法**）③を $\cos\theta_1$ の関数と見て，②での値域を求める。

$y = 4\left(\cos\theta_1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 + x^2 - 2 = f(\theta_1)$ とおけば

(i)$x < 0$ のとき，③は $-1 \leqq \cos\theta_1 \leqq x + 1$ また $f(-1) = f(x+1) = 2(x+1)^2$ より

$x^2 - 2 \leqq y \leqq 2(x+1)^2$

(ii)$0 \leqq x$ のとき，③は $x - 1 \leqq \cos\theta_1 \leqq 1$ また $f(1) = f(x-1) = 2(x-1)^2$ より

$x^2 - 2 \leqq y \leqq 2(x-1)^2$

その２（**代数的方法**）③を $\cos\theta_1$ の方程式と見て，解が②にある存在条件を求める。

$4\cos^2\theta_1 - 4x\cos\theta_1 + 2x^2 - 2 - y = g(\theta_1)$ とおけば

$g(\theta_1) = 4\left(\cos\theta_1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 + x^2 - 2 - y$ より

(i)$x < 0$ のとき，③は $-1 \leqq \cos\theta_1 \leqq x + 1$ また $g(-1) = g(x+1) = 2(x+1)^2 \geqq 0$

$-1 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq x + 1, x^2 - 2 - y \leqq 0$

(ii)$0 \leqq x$ のとき，③は $x - 1 \leqq \cos\theta_1 \leqq 1$ また $g(1) = g(x-1) = 2(x-1)^2 \geqq 0$

$x - 1 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq 1, x^2 - 2 - y \leqq 0$

で，同じ結果となる。

面積は積分で求めればいい。

$$2\int_0^2 \left\{2(x-1)^2 - (x^2 - 2)\right\} dx = 2\left[\frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

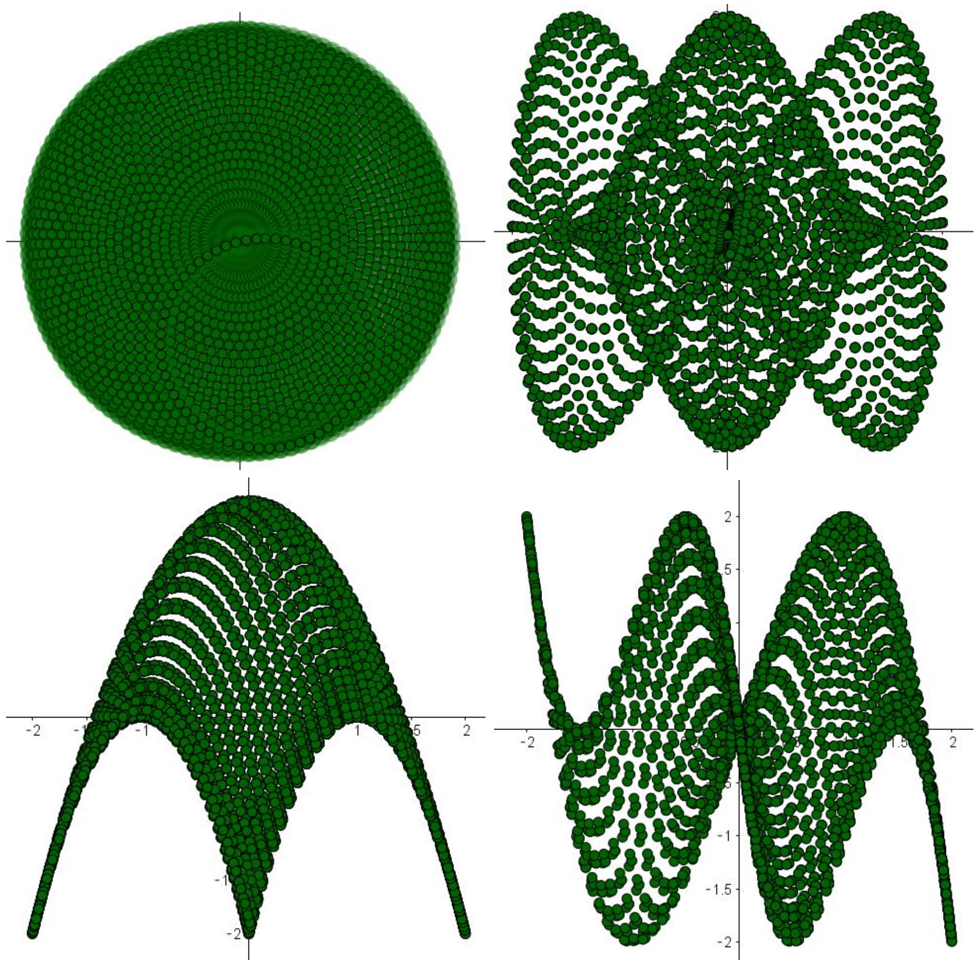
面白いのはここからで，次の場合はどうなるんだろう。

$(\sin\theta_1 + \sin\theta_2, \cos\theta_1 + \cos\theta_2), (\sin\theta_1 + \sin\theta_2, \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2)$

$(\sin\theta_1 + \sin\theta_2, \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2), (\sin\theta_1 + \sin\theta_2, \sin 3\theta_1 + \sin 3\theta_2)$

予想できました？

Geogeba の式を変えるだけで，すぐ表示。



最初は良い問題になるな。2 つ目は難しすぎそう，3 つ目は左と同じで，4 つ目は 3 倍角からそう難しくはなくこれが昔見たものだった。