楕円上の点の共分散

19 信大
n を自然数とする。
(1) 等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n}=0$ を示せ。
(2) c を実数とする。自然数 k に対し，
$a_k=c\sin\frac{k\pi}{4n}-\cos\frac{k\pi}{4n}, b_k=c\sin\frac{k\pi}{4n}+\cos\frac{k\pi}{4n}$ とおく。
2 つの変量 a,b のデータが， $8n$ 個の a,b の値の組として，次のように与えられているとする。
$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_{8n},b_{8n})$,
このとき，2 つの変量 a,b の共分散を求めよ。

(1) $$\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(n+k)\pi}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\pi+\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=0$$

で，和が 0 になるので十分だが，和積公式を使うと
$$2\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}=\sum_{k=1}^{2n}\left\{\cos\frac{(k+1)\pi}{n}-\cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right\}$$
$$=\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\frac{0\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}-\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{5\pi}{n}-\cos\frac{3\pi}{n}\cdots$$
$$+\cos\frac{2n\pi}{n}-\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}+\cos\frac{(2n+1)\pi}{n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}$$
$$=\cos 2\pi+\cos(2\pi+\frac{\pi}{n})-\cos 0-\cos\frac{\pi}{n}=0$$

もっと面白くすると，オイラーの公式（$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）を使って
$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{2n}e^{\frac{k\pi}{n}i}=e^{\frac{\pi}{n}i}\frac{1-e^{\frac{2n\pi}{n}i}}{1-e^{\frac{\pi}{n}i}}=0$$
何故なら，$e^{\frac{2n\pi}{n}i}=e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{k\pi}{n}=0$ も一気に証明できるなあ。

(2) (1) より，
$$\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{8n}\cos\frac{k\pi}{4n}=\sum_{k=1}^{8n}\cos\frac{k\pi}{2n}=0,\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{8n}\sin\frac{k\pi}{4n}=\sum_{k=1}^{8n}\sin\frac{k\pi}{2n}=0$$
共分散は，積の平均から平均の積を引けばいいので
$$\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}a_kb_k-\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}a_k\cdot\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}b_k$$
$$=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}(c^2\sin^2\frac{k\pi}{4n}-\cos^2\frac{k\pi}{4n})-\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}(c\sin\frac{k\pi}{4n}-\cos\frac{k\pi}{4n})\cdot\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}(c\sin\frac{k\pi}{4n}+\cos\frac{k\pi}{4n})$$
$$=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}\left\{\frac{c^2}{2}(1-\cos\frac{k\pi}{2n})-\frac{1}{2}(1+\cos\frac{k\pi}{2n})\right\}-0=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}\frac{c^2-1}{2}=\frac{c^2-1}{2}$$

相関係数まで計算すると，さらに興味深く
$$(Sx)^2=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}a_k^2-\left(\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}a_k\right)^2$$
$$=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}\left(c^2\sin^2\frac{k\pi}{4n}-2c\sin\frac{k\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{4n}+\cos^2\frac{k\pi}{4n}\right)-0$$
$$=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}\left\{\frac{c^2}{2}(1-\cos\frac{k\pi}{2n})-\sin\frac{k\pi}{2n}+\frac{1}{2}(1+\cos\frac{k\pi}{2n})\right\}=\frac{1}{8n}\sum_{k=1}^{8n}\frac{c^2+1}{2}=\frac{c^2+1}{2}$$
同様に $(Sy)^2=\dfrac{c^2+1}{2}$
よって，相関係数は $\dfrac{c^2-1}{c^2+1}$（これって，離心率？調べてみると，第三離心率の平方ということらしい）
$x=c\sin\theta-\cos\theta, y=c\sin\theta-\cos\theta$ とすると，
$\sin\theta=\dfrac{x+y}{2c},\sin\theta=\dfrac{x-y}{2}$ なので，$\dfrac{(x+y)^2}{4c^2}+\dfrac{(x-y)^2}{4}=1$ 楕円上，目で見ると，