円錐の切断

19 名古屋

正の整数 n に対し　$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1) I_1 を求めよ。必要ならば　$\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2) $n\geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。
D を底面とし，点 $(0,0,1)$ を頂点とする円錐を C とする。
C を平面 $x=\dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。
z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

(1) で，公式があるのは，いかにも名古屋らしい。

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{(\sin\theta)'}{1+\sin\theta}+\frac{(\sin\theta)'}{1-\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$$

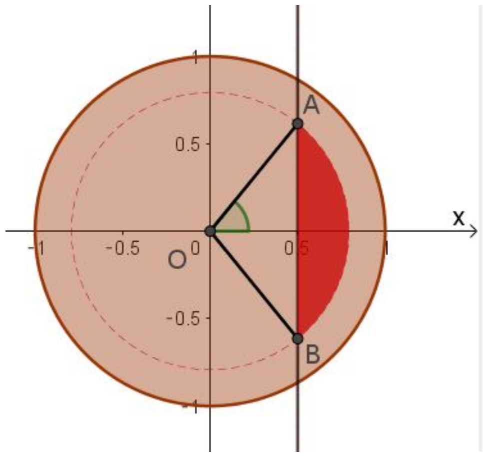
(2) 部分積分を使った漸化式。

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^{n-2}\theta\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}(\tan\theta)'d\theta=\left[\frac{\tan\theta}{\cos^{n-2}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\frac{-\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{3}2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta=\sqrt{3}2^{n-2}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$$

よって，$(n-1)I_n=\sqrt{3}2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}$ すなわち，$I_n=\dfrac{\sqrt{3}2^{n-2}}{n-1}+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

(3) z 軸に垂直な平面で切ると円，　x 軸に垂直な平面で切ると双曲線。円のほうが楽と。
昔，東工大で断面積を三角関数の変数で計算した問題があったが（2012 年），これも同じ。



$z=t$ のとき，円の半径は $1-t$
図の $\angle AOB=2\theta$ とすると，切り口は弓形で，
その面積は
$\dfrac{1}{2}(1-t)^2(2\theta-\sin 2\theta)$
ただし，$\cos\theta=\dfrac{1}{2(1-t)}$

求める体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^2(2\theta-\sin 2\theta)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)dt$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2(1-t)}$ より，$1-t=\dfrac{1}{2\cos\theta}, -\sin\theta d\theta=\dfrac{dt}{2(1-t)^2}=2\cos^2\theta dt$ $\begin{array}{c|cc} t & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{3} & 0 \end{array}$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4\cos^2\theta}(\theta-\sin\theta\cos\theta)\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-(\cos\theta)'}{\cos^4\theta}\theta d\theta=\left[\frac{1}{3\cos^2\theta}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{3\cos^3\theta}=\frac{8\pi}{9}-\frac{1}{3}I_3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=I_3-I_1$$

よって，$V=\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{1}{6}I_3+\dfrac{1}{8}I_1$

(2) より，$I_3=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}I_1$ なので，$V=\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{24}I_1$

(1) より，$V=\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{24}\log(2+\sqrt{3})$

計算力の勝負でした。