正四角錐を回転する

19 慶応
空間内の図形 O-ABCD は，OA=3 である正四角錐とする。ただし，正四角錐 O-ABCD とは，頂点が O，底面が正方形 ABCD で 4 つの側面が合同な二等辺三角形となる四角錐のことをいう。

(1) 点 O から平面 ABCD に垂線を下ろし，平面 ABCD との交点を H とする。∠AOH= θ としたとき，線分 AC の長さを θ を用いて表わせ。また，正四角錐 O-ABCD の体積を θ を用いて表わせ。

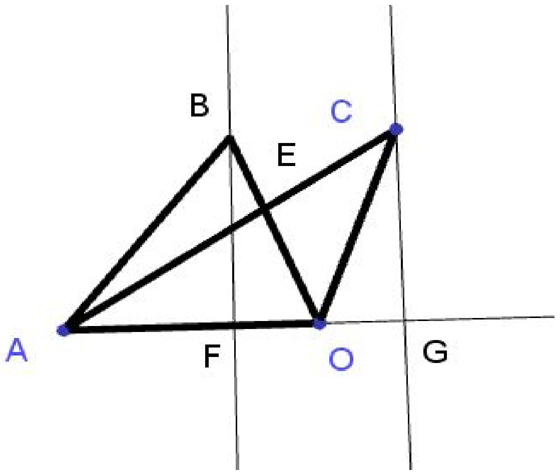
以下，OA= 3 であり，2 点 O,A は固定されているとする。
(2)　図形 O-ABCD が正四角錐であるという条件を満たしながら，3 点 B,C,D が動くとき，正四角錐 O-ABCD の体積の最大値を求めよ。

(3) 正四角錐 O-ABCD の体積が最大であるという条件を満たしながら，3 点 B,C,D が動くとする。このとき，△ OAC の周および内部が通過しうる範囲を K_1，△OAB の周および内部が通過しうる範囲を K_2 とする。K_1 の体積と，K_1 と K_2 の共通部分の体積を求めよ。

(1) AH= $3\sin\theta$ なので，AC= $6\sin\theta$
体積は AB= $3\sqrt{2}\sin\theta$,OH= $3\cos\theta$ なので，$\dfrac{1}{3}\cdot(3\sqrt{2}\sin\theta)^2\cdot 3\cos\theta = 18\sin^2\theta\cos\theta$
(2) $\cos\theta = c$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<c<1$
このとき，$18(1-c^2)c = f(c)$ の最大値を求めればいいので，

$f'(c) = 18(1-3c^2)$

c	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f		↗	$4\sqrt{3}$	↘	

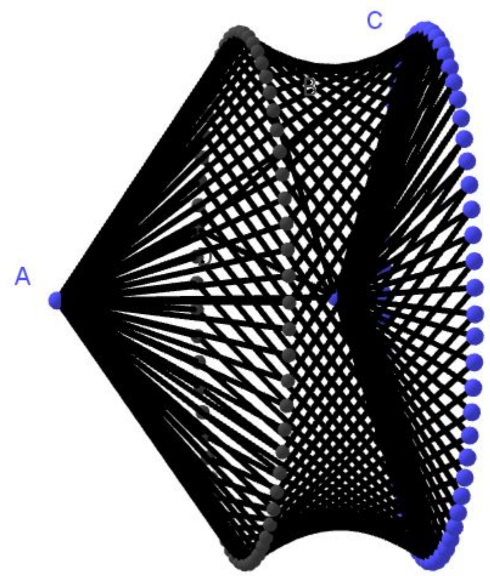


$OA=OB=OC=3, \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，
$AC = 2\sqrt{6}, AB = 2\sqrt{3}$ 三平方を使いまくって，
$OG = OF = 1, BF = CG = 2\sqrt{2}$
座標を決めてしまえば，E の位置もわかるので，
$A(-3,0), B(-1,2\sqrt{2}), C(1,2\sqrt{2})$
AC と OB の交点 E の y 座標を計算し，$\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

よって，K_1 の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\pi(2\sqrt{2})^2(4-1) = 8\pi$

K_1 と K_2 の共通部分の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{6\sqrt{2}}{5}\right)^2(2+1) = \dfrac{72}{25}\pi$

入試問題はここまでだけれど，OA の周りに回す立体は，昔流行った一様双曲面だよな。
円錐と一様双曲面と円錐を取り除いた立体。
さすがに，この体積を求めよという問題にはしなかったのか。



この体積を求めてみよう。
まず，AB が周ってできる円錐，$\dfrac{1}{3}\cdot\pi(2\sqrt{2})^2\cdot 2 = \dfrac{16}{3}\pi$
次の一様双曲面で囲まれる部分，
左の図は実際の空間内では，
$B(-1, 2\sqrt{2}\cos\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta), C(1, 2\sqrt{2}, 0)$ となっており，
$BC = 2\sqrt{3}$ から，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ なので，$B(-1,\sqrt{2},\sqrt{6})$
直線 BC が x 軸の周りに回転してできる体積を積分で求めてもいいが，
昔作った一様双曲面の公式より
$\dfrac{2}{3}\pi(2\sqrt{2})^2\cdot 1\cdot(2+\cos\theta) = \dfrac{40}{3}\pi$
OC が周ってできる円錐 $\dfrac{1}{3}\cdot\pi(2\sqrt{2})^2\cdot 1 = \dfrac{8}{3}\pi$
を引いて，
$\dfrac{16}{3}\pi + \dfrac{40}{3}\pi - \dfrac{8}{3}\pi = \dfrac{48}{3}\pi = 16\pi$

2008 年東大の回転する正八面体の問題のとき作った公式
上の点の座標を $P(r\cos t, r\sin t, h)$，下の点の座標を $Q(r\cos(t+s), r\sin(t+s), -h)$ としてこいつ（線分 PQ ）を回転したときにできる一様双曲面に囲まれてできる部分の体積
$2\pi\displaystyle\int_0^h (x^2+y^2)dz = \dfrac{2}{3}\pi r^2 h(2+\cos s)$
t が 0 のとき体積最大（$2\pi r^2 h$）の円柱，t が π のとき体積最小（$\dfrac{2}{3}\pi r^2 h$）の円錐２つ
t が $\dfrac{\pi}{2}$ のとき体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^2 h$）の一葉双曲面（$h=r$ のときは球と同じ体積）