複素数

複素数が苦手という人に，ちょうど西の方の大学で練習。
最初に図形に複素数を利用する，これが一番一般的かな。

19 同志社

i を虚数単位とする。等式 $(2+\sqrt{3}+i)\alpha+(1-i)\gamma=(3+\sqrt{3})\beta$ を満たす相異なる 3 つの複素数 α,β,γ を考え，複素数平面上の 3 つの点 A(α),B(β),C(γ) を考える。△ABC において，∠A,∠B の大きさを度数法で求め，2 辺の比 AB:AC を求めよ。
また，$\alpha=1+i,\beta=3+i$ のとき，点 A を中心として点 B を 60° だけ反時計回りに回転した点 D を表す複素数を求めよ。また，直線 AC に関して点 D と対称な位置にある点を表す複素数を求めよ。

次に，代数的な方程式との関係。

19 立命

以下，極形式の偏角はすべて 0 以上 2π 未満である。
(1) 2 次方程式 $x^2+2x+2=0$ の 2 つの解のうち，虚部が正であるものを z_1，負であるものを z_2 とおく。それぞれを極形式で表せ。
(2) w を複素数とする。w が $w^2=z_1$ を満たすとき，w を極形式で表わせ。また w が $w^2=z_2$ を満たすとき，w を極形式で表わせ。
これら 4 つの複素数を，偏角が小さい順に w_1,w_2,w_3,w_4 とする。各 $w_k(k=1,2,3,4)$ が解となる，係数が 1 である 4 次方程式を求めよ。また，$w_1+w_2+w_3+w_4$ と $w_1w_2w_3w_4$ と $w_1^2+w_2^2$ を求めよ。

そして最後に，複素数平面での変換 (1 次分数変換　円円対応)。

19 慈恵医科大学

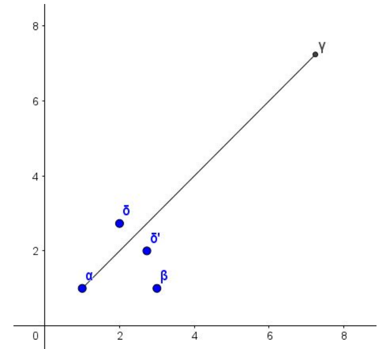
方程式 $x^3+1=0$ の解のうち，虚数部分が正であるものを α とする。複素数平面上の 3 点 A(α),B(-1),C$(\bar{\alpha})$ を頂点とする △ABC を考える。△ABC の周上の点 P(z) に対して，原点 O を端点とし P(z) を通る半直線上に $|w|=\dfrac{1}{|z|}$ を満たす点 Q(w) をとるとき，次の問いに答えよ。
(1) $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ となることを示せ。
(2) P(z) が △ ABC の周上を動くとき，Q(w) が描く図形によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

∠A を求めるために，欲しいのは $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$，変形してもいいし，$\gamma$ を解いておいて代入すればいい。

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}(1+i)=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ よって，∠A$=45^\circ$，AB:AC$=\sqrt{2}:(3+\sqrt{3})$

$\dfrac{\gamma-\beta}{\beta-\beta}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}(-1+\sqrt{3}i)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$ よって，∠B$=120^\circ$

D に対応するのは，
$\delta=(\beta-\alpha)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)+\alpha=2+(\sqrt{3}+1)i$
最後に求めるものは，
$\overline{(\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ))(\delta-\alpha)}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)+\alpha$
$=\sqrt{3}+1+2i$
図を見て，点 A を中心として点 B を 30° だけ反時計回りに回転した点としても求めてもいいだろう。
$(\beta-\alpha)(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)+\alpha=\sqrt{3}+1+2i$



(1) $z=-1\pm i$ より $z_1=-1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi), z_2=-1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)$
(2) $w^2=z_1$ $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，n を整数として，$r^2=\sqrt{2}, 2\theta=\frac{3}{4}\pi+2n\pi$ なので
$w=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi), \sqrt[4]{2}(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi)$
$w^2=z_2$ のときも同様に $w=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi), \sqrt[4]{2}(\cos\frac{13}{8}\pi+i\sin\frac{13}{8}\pi)$
$w_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi), w_2=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi),$
$w_3=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi), w_4=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{13}{8}\pi+i\sin\frac{13}{8}\pi)$
x を w^2 として，$w^4+2w^2+2=0$ これが $(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w-w_4)=(w^2-z_1)(w^2-z_2)=0$ なのだから，$w_1+w_2+w_3+w_4=0$ と $w_1w_2w_3w_4=2$ と $w_1^2+w_2^2=-2$

(1) 実数 k を用いて $w=kz$ とおけて，$|w|=\dfrac{1}{|z|}$ より，$k|z|=\dfrac{1}{|z|}$
つまり，$w=\dfrac{z}{|z|^2}=\dfrac{z}{z\bar{z}}=\dfrac{1}{\bar{z}}$

(2) $(x+1)(x^2-x+1)=0$ より，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ で，点 P が直線 AC 上にあるとき，$z+\bar{z}=1$
(1) より $z=\dfrac{1}{\bar{w}}$ これを代入して，$\dfrac{1}{\bar{w}}+\dfrac{1}{w}=1$，変形して $(w-1)(\bar{w}-1)=1$
つまり，$|w-1|=1$ 点 (1) 中心，半径 1 の円。(今回は式の変形ですんだが，点 $z=\frac{1}{2}+qi(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq q\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ を移動して，$w=x+yi$ として軌跡を求めてもいい)
右図から，点 P が線分 AB 上を動くときは，円の線分 AC 右側。
点が線分 AB,BC 上を動くときも同様なので，
求める面積は
$3\left(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)+\triangle ABC$
$=2\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$