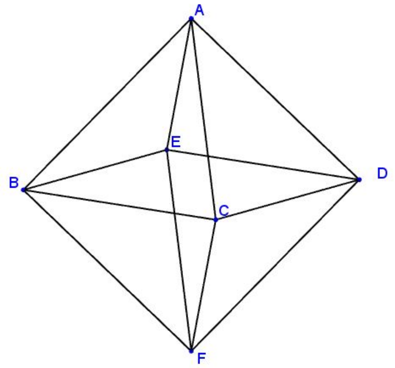
正八面体を切る平面

'18 大阪 4

座標空間に 6 点 A$(0,0,1)$,B$(1,0,0)$,C$(0,1,0)$,D$(-1,0,0)$,E$(0,-1,0)$.F$(0,0,-1)$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。

s,t を $0<s<1, 0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB,AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P,Q とし，線分 FD,FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R,S とする。



(1) 4 点 P,Q,R,S が同一平面上にあることを示せ。

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。

s,t が $0<s<1, 0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P,Q,R,S を通る平面による切り口の面積を X とする。

線分 LM の長さが (2) の値をとるとき，X を最大とするような s,t の値と，そのときの X の値を求めよ。

(1) $PQ//BC//DE//RS$ 簡単な問だが,「あとの問題はこれを使えよ」という提示でもあるわけだ。

(2) 各点の座標が与えられているので，L,M のそれを計算し，(Geogebra 的な書き方だが)

$$L=\frac{P+Q}{2}=\frac{(1-s)B+sA+(1-s)C+sA}{2}$$

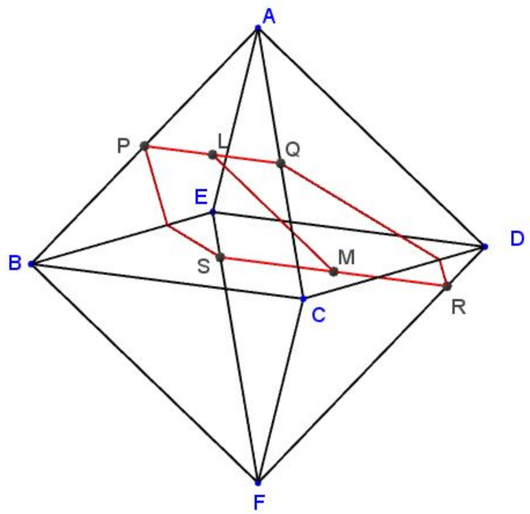
$$=\frac{1}{2}\left\{(1-s)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+2s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1-s}{2}\\ \frac{1-s}{2}\\ s\end{pmatrix}$$

$$M=\frac{R+S}{2}=\frac{(1-t)D+tF+(1-t)E+tF}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1-t)\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)+2t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{t-1}{2}\\ \frac{t-1}{2}\\ -t\end{pmatrix}$$



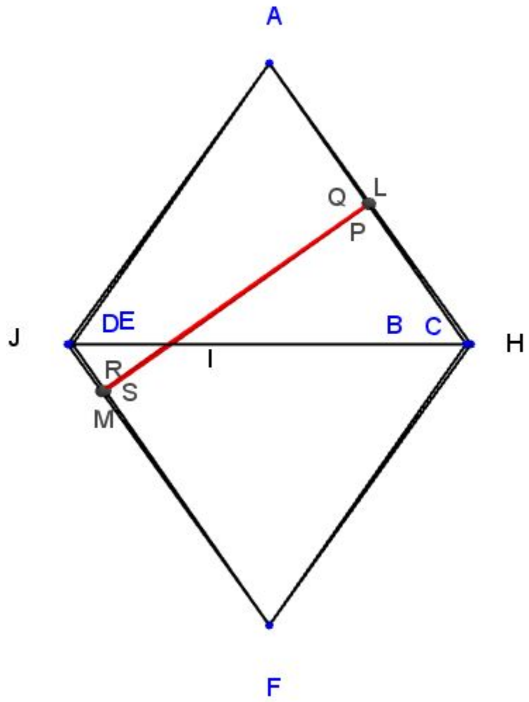
$$LM^2=2\left(\frac{s+t-2}{2}\right)^2+(s+t)^2=\frac{3}{2}(s+t)^2-2(s+t)+2=\frac{2}{3}\left(s+t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

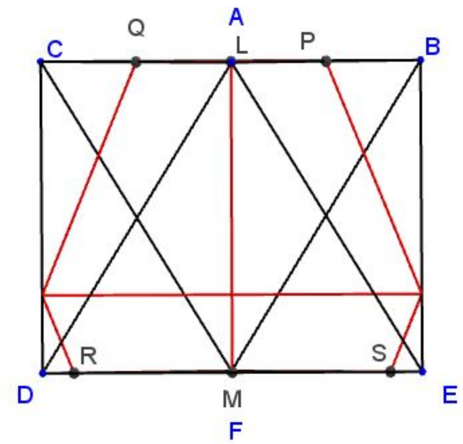
よって，$m=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　これは $s+t=\dfrac{2}{3}$ のとき成立。

下の図は Geogebra で回転して作った図。

$\triangle ABC$ と $\triangle FDE$ は平行でその間の距離が $m=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ということなんだよな。

AFLM を含む平面の断面図から，AL⊥ ML より，$\overrightarrow{\mathrm{AL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ML}}=0$ としてもいいだろう。





面積を求める切り口の図形は，底辺 $\sqrt{2}$ の台形 2 個。

$PQ=\sqrt{2}(1-s), RS=\sqrt{2}(1-t)$

問題は高さだが，上の左の図より

$\triangle LHI \backsim \triangle MJI$ なので，$LI:MI=s:t$

つまり，$LI=\dfrac{s}{s+t}\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}s, LI=\dfrac{t}{s+t}\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}t$

よって，

$$X=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+(1-s)\sqrt{2}\right)\sqrt{3}s+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+(1-t)\sqrt{2}\right)\sqrt{3}t$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left((2-s)s+(2-t)t\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(2(s+t)-(s^2+t^2)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(2(s+t)-(s+t)^2+2st\right)$$

ここで $s+t=\dfrac{2}{3}$ より，

$s>0, t>0$ だから相加相乗平均の関係から，$st \leqq \left(\dfrac{s+t}{2}\right)^2=\dfrac{1}{9}$（等号は $s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき）

つまり，$X \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{9}+2\dfrac{1}{9})\right)=\dfrac{5}{9}\sqrt{6}$

で，求める最小値は $\dfrac{5}{9}\sqrt{6}$ で $s=t=\dfrac{1}{3}$ のとき

　往年（2008 年）の東大の正八面体の回転という名作を思い出す。((3) の LM の周りに正八面体を回転した体積を求めよというやつ，L,N は $\triangle ABC, \triangle FDE$ の重心)