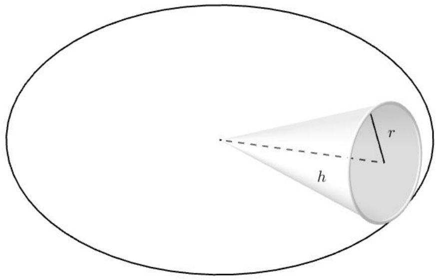
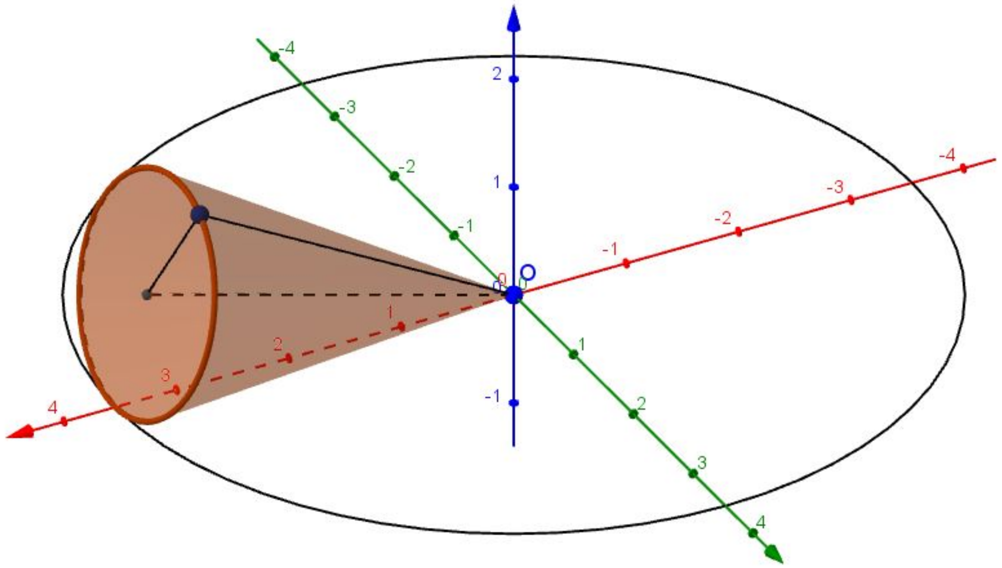
円錐を転がした立体

質問に答えて，

（東京電機大）

半径 r ，高さ $h(>r)$ の直円錐を，頂点を固定して平面状を図のようにすべることなくころがす。円錐の中心軸が一周してもとの位置に戻るとき，円錐が通過する部分の体積を求めよ。



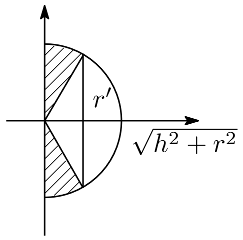


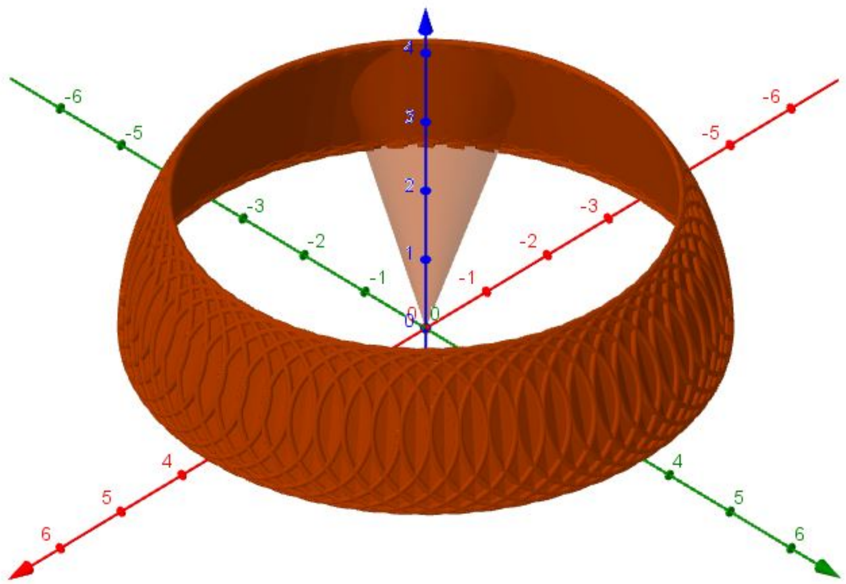
円上の点の原点から最も遠い点は $\sqrt{h^2+r^2}$

よって，立体は，半径 $\sqrt{h^2+r^2}$ の半球の一部。

$\cos\theta = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}, r' = 2r\cos\theta$ とおくと，

下図の斜線部分を x 軸の周りに回転した立体。円錐をひいてもいいが，





$$\pi\int_0^{r'}\left\{h^2+r^2-x^2-\left(\frac{\sqrt{h^2+r^2-r'^2}}{r'}x\right)^2\right\}dx = \pi\int_0^{r'}\left(h^2+r^2-\frac{h^2+r^2}{r'^2}x^2\right)dx$$

$$= \pi(h^2+r^2)\int_0^{r'}\left(1-\frac{1}{r'^2}x^2\right)dx = \pi(h^2+r^2)\left[x-\frac{x^3}{3r'^2}\right]_0^{r'} = \pi(h^2+r^2)\frac{2r'}{3}$$

$$= \frac{4hr\sqrt{h^2+r^2}}{3}\pi$$

きれいな結果だ。