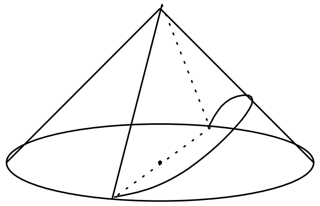
円錐を切断した立体

質問に答えて，

> 底面の半径 1 高さ 1 の円錐を，底面の中心を通り母線に平行な平面で切断する。
> その平面と円錐と底面に囲まれた部分の体積を求めよ。
>
> 

この部分よりはその上の部分，つまり，切断面と円錐と，底面と切断面の交線を通る底面に垂直な平面とで囲まれた部分の体積は次のように簡単に出る。

底面が放物線と直線で囲まれた部分の面積で，高さが $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の錐の体積。

円錐の方程式は $x^2+y^2=(1-z)^2$，$z=x$ と連立すると，　$x=\dfrac{1-y^2}{2}$

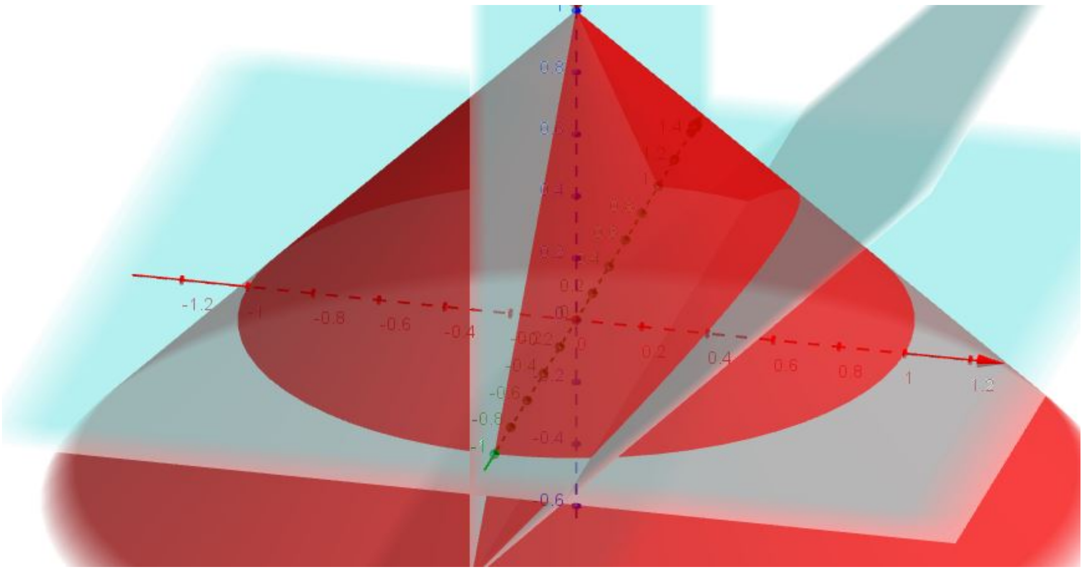
これと $x=0$ との囲む部分の面積は $\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2}2^3=\dfrac{2}{3}$

これを正射影とする面積は $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

よって，求める上の部分の体積は $\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{9}$

下の部分の体積は円錐の半分 $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\pi 1^2 1=\dfrac{\pi}{6}$ から引いて，$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2}{9}$

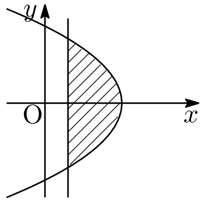
なるほど積分を使わないで求まるんだということらしいが，積分計算のいい練習になるので積分を使って計算しよう。



下の部分

円錐 $x^2+y^2=(1-z)^2$ と平面 $z=x+\sqrt{2}t$ との交線の正射影は，$x^2+y^2=(1-\sqrt{2}t-x)^2$

つまり $x=\dfrac{1}{2(1-\sqrt{2}t)}\{y^2-(1-\sqrt{2}t)^2\}$



$x=\sqrt{2}t$

これと $x=\sqrt{2}t$ との交点の y 座標は $y^2-(1-\sqrt{2}t)^2=2(1-\sqrt{2}t)\sqrt{2}t$

つまり $y=\pm\sqrt{1-2t^2}$

よって，左図の斜線部分の面積は，$\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2(1-\sqrt{2}t)}(2\sqrt{1-2t^2})^3$

$=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1-\sqrt{2}t}(1-2t^2)\sqrt{1-2t^2}=\dfrac{2}{3}(1+\sqrt{2}t)\sqrt{1-2t^2}$

さあ求める部分の体積 V_1 は，

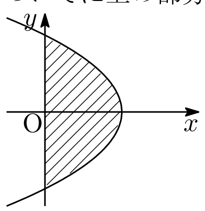
$$V_1=\frac{2}{3}\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}(1+\sqrt{2}t)\sqrt{1-2t^2}dt$$

ここで，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと，$\begin{array}{c|cc} x & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \hline \theta & -\dfrac{\pi}{2} & 0 \end{array}$,$dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

$$V_1=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin\theta)\cos^2\theta d\theta=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{\cos^2\theta-\cos^2\theta(\cos\theta)'\}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left\{\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\cos^2\theta(\cos\theta)'\right\}d\theta=\frac{2}{3}\left[\frac{\theta+\frac{\sin\theta}{2}}{2}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$$

ついでに上の部分も積分計算でだしておくか。



左図の斜線部分の面積は，

$\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2(1-\sqrt{2}t)}(2(1-\sqrt{2}t)^3=\dfrac{2}{3}(1-\sqrt{2}t)^2$

求める部分の体積 V_2 は，

$$V_2=\frac{2}{3}\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}t)^2dt=\frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{1}{-\sqrt{2}}\left[\frac{(1-\sqrt{2}t)^3}{3}\right]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{9}$$

確かに，積分計算のいい練習になる。