循環する解をもつ3次方程式

　また，これだ。複素数に関連して頻出となるかな。昨年の問題，早稲田 17-5　をお勧めする。

18 千葉 12

複素数 $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha = z + z^8$ とおく。

$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha) = 0$ となるものとする。

ただし，全ての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1) $f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくていい。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。

(1) $z^9 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ より，$\alpha = z + z^8 = z + \dfrac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$

$\theta = \dfrac{2\pi}{9}$ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{\alpha}{2}, 3\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ なので，$\cos 3\theta = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

3 倍角の定理より，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

以上より，$4\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$ 整理して，$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$

よって，求める方程式は，$x^3 - 3x + 1 = 0$

(2) 2θ についても同じ関係が成り立つので，$2\cos 2\theta = z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2 = \alpha^2 - 2$

(1) の 3 次方程式の解と係数の関係より，解の和は 0 なので，もう一つの解は $0-(\alpha+(\alpha^2-2)) = -\alpha^2-\alpha+2$

別解）複素数らしく

(1) $z^9 - 1 = 0$ を因数分解して，$(z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1) = 0$

$z^3 \neq 1$ より $z^6 + z^3 + 1 = 0$，$z \neq 0$ より $z^3 + 1 + \dfrac{1}{z^3} = 0$（相反方程式）

$\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 1 = 0$ よって，$x^3 - 3x + 1 = 0$

(2) $z_1 = z^2$ とおくと，$z^9 = 1$ より $z_1^6 + z_1^3 + 1 = z^{12} + z^6 + 1 = z^3 + z^6 + 1 = 0$

つまり，$z_1 + \dfrac{1}{z_1} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 2 = \alpha^2 - 2$ も $x^3 - 3x + 1 = 0$ をみたす。

もう 1 つは上と同じ。

　早稲田 17-5 は $z^7 = 1$ のときでした。方程式は $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

　そのときに解が循環する 3 次方程式の話題にも触れましたが，この 1 の n 乗根を求める方程式から作られるものは，その代表的なものです。

そして，その解を α とおくと，$\alpha^2 - 2$ も解と出てくる理由もこういうことです。

　この手の問題は，数研通信に書いたものと，早稲田のものと，これで十分かな。あとは，ガロア理論とのかかわり（まさか入試ではね）くらい。

$z^{2n+1} = 1$ のとき $(z-1)(z^{2n} + \cdots + 1) = 0$

$z \neq 1$ ならば $z^n + \dfrac{1}{z^n} + \cdots + 1 = 0 \cdots$①

$z + \dfrac{1}{z} = t$ とおくと $\left(t = 2\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$z^n + \dfrac{1}{z^n} = t^n - n\left(z^{n-2} + \dfrac{1}{z^{n-2}}\right) - \cdots$

　例えば $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = t^2 - 2, z^3 + \dfrac{1}{z^3} = t^3 - 3t, z^4 + \dfrac{1}{z^4} = t^4 - 4(t^2-2) - 6 = t^4 - 4t^2 + 2$

より①は t の n 次方程式となる。

$2n{+}1$ が素数のときには，その解を α とおくと，残りの解は，$\alpha^2{-}2, \alpha^3{-}3\alpha, \alpha^4{-}4\alpha^2{+}2(= (\alpha^2{-}2)^2{-}2), \cdots$

$n = 3$ のとき，$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0, t = \alpha, \alpha^2 - 2, \alpha^3 - 3\alpha = -\alpha^2 - \alpha + 1$ で解が循環する。

$n = 4$ のとき，$t^4 - 4(t^2-2) - 6 + t^3 - 3t + t^2 - 2 + t + 1 = 0$ つまり $t^4 + t^3 - 3t^2 - 2t + 1 = 0$

これは因数分解できて，$(t+1)(t^3 - 3t + 1) = 0, t = \alpha, \alpha^2 - 2, \alpha^3 - 3\alpha = -1, \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2$

解が循環する方程式は $t^3 - 3t + 1 = 0$ で, 循環する解は $\alpha, \alpha^2 - 2, \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = -\alpha^2 - \alpha + 2$