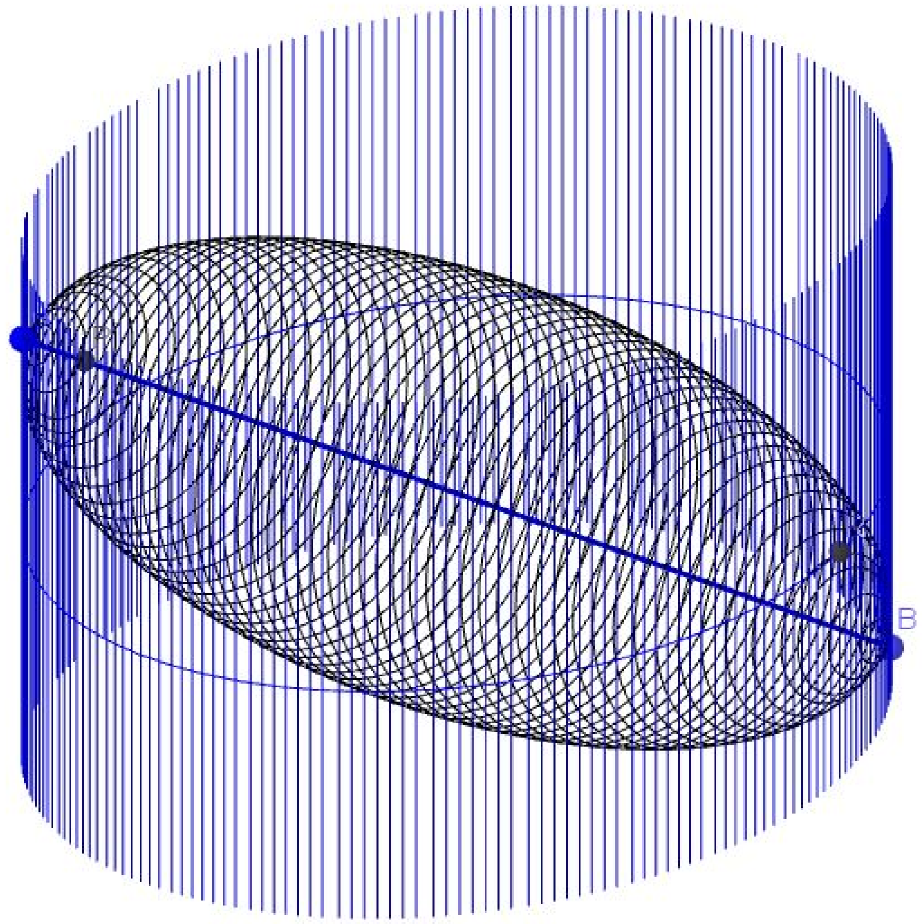
座標軸でない軸の周りの回転体　と　楕円柱の交わり

計算量もとても多い。

18 東工 4
xyz 空間内において，連立不等式 $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1, |z| \leqq 6$ により定まる領域を V とし，
2 点 $(2,0,2), (-2,0,-2)$ を通る直線を ℓ をする。
(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $P_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする。
また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする。
L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表わせ。
(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える。
このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。



(1) ℓ の方向ベクトルは $(1,0,1)$ なので，$H_t : x-\dfrac{t}{\sqrt{2}}+z-\dfrac{t}{\sqrt{2}}=0$
つまり $x+z=\sqrt{2}$
$L_\theta : x=2\cos\theta, y=\sin\theta$ より，連立して $2\cos\theta+z=\sqrt{2}t$ つまり $z=\sqrt{2}t-2\cos\theta$
(2) θ を動かして，中心 $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ と点 $(2\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2}t-2\cos\theta)$ との距離の最小値を半径 r とする円が断面積になる。

$$r^2=\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-2\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-2\cos\theta\right)^2=7\cos^2\theta-4\sqrt{2}t\cos\theta+t^2+1$$

$$=7\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt{2}t}{7}\right)^2+1-\frac{t^2}{7}\quad(-1\leqq\cos\theta\leqq 1)$$

対称性によって t が正の範囲だけ考えて $\dfrac{2\sqrt{2}t}{7}\leqq 1$ つまり $t\leqq\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ のとき最小値 $1-\dfrac{t^2}{7}$
それ以外，最小値 $7-4\sqrt{2}t+t^2+1=8-4\sqrt{2}t+t^2=(2\sqrt{2}-t)^2$
よって，求める体積は

$$2\pi\left\{\int_0^{\frac{7\sqrt{2}}{4}}\left(1-\frac{t^2}{7}\right)dt+\int_{\frac{7\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}}(t-2\sqrt{2})^2dt\right\}=2\pi\left\{\left[t-\frac{t^3}{21}\right]_0^{\frac{7\sqrt{2}}{4}}+\left[\frac{(t-2\sqrt{2})^3}{3}\right]_{\frac{7\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}}\right\}$$

$=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\pi$ すごい計算量だな。
とにかく，これ目で見たくありませんか？