

# 立方体の頂点からできる図形

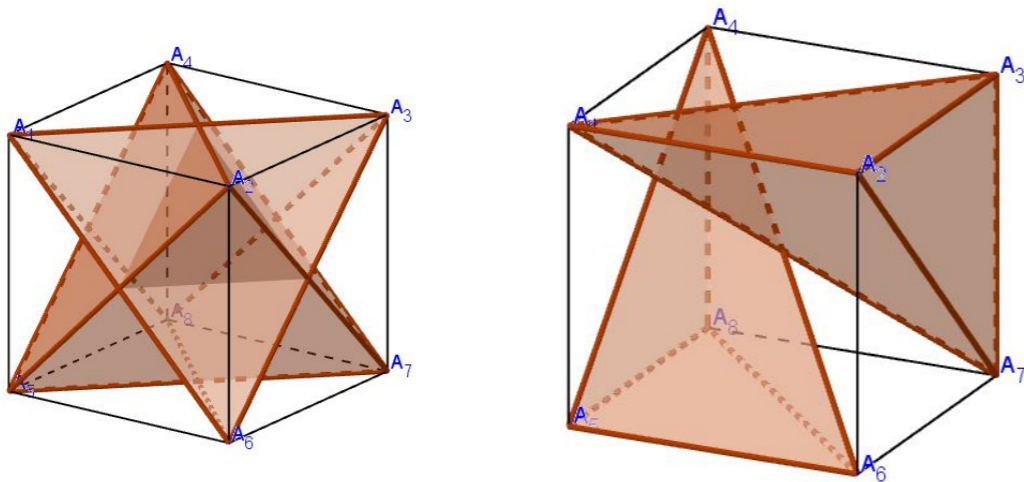
図をかきながらやるのだが...

## 18 早稲田 5

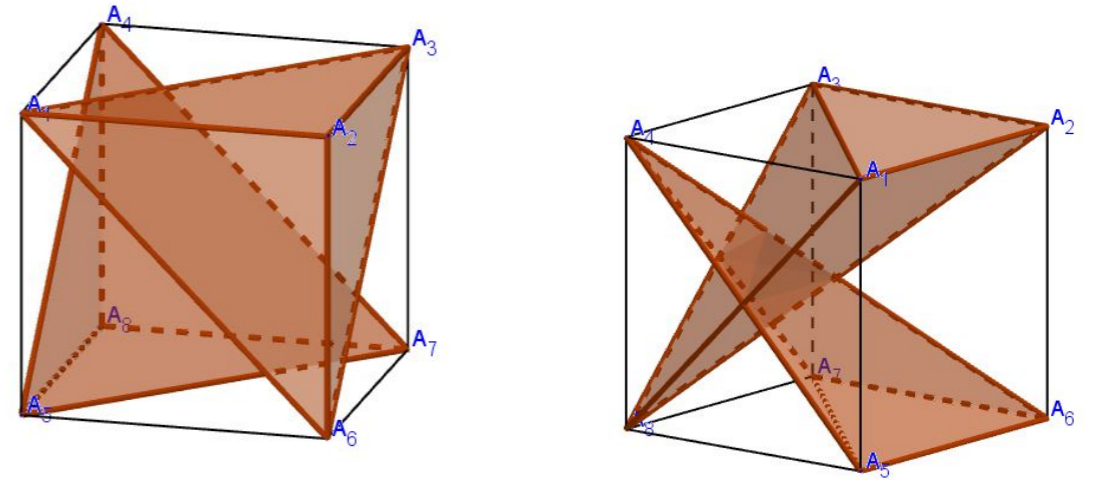
立方体の8個の頂点を図のように  $A_1, A_2, \dots, A_8$  とする。この8点から無作為に4点を選び、それらを頂点とする四面体あるいは四角形を  $X$  とする。また、残りの4点から同様にしてできる図形を  $Y$  とし、 $X$  と  $Y$  の共通部分(交わってできる図形)を  $Z$  とする。次の問いに答えよ。ただし、(1), (2) は答のみでよい。

- (1)  $X$  が  $A_1, A_3, A_6, A_8$  を頂点とする四面体で、 $Y$  が  $A_2, A_4, A_5, A_7$  を頂点とする四面体のとき、 $Z$  はどんな図形か。
- (2)  $X$  が  $A_1, A_2, A_3, A_7$  を頂点とする四面体で、 $Y$  が  $A_4, A_5, A_6, A_8$  を頂点とする四面体のとき、 $Z$  はどんな図形か。
- (3)  $X$  と  $Y$  が共通部分をもたない確率を  $p$  とし、 $X$  と  $Y$  の共通部分  $Z$  が1点になる確率を  $q_0$ 、線分になる確率を  $q_1$ 、平面図形になる確率を  $q_2$ 、立体図形になる確率を  $q_3$  とする。 $p, q_0, q_1, q_2, q_3$  を求めよ。

(1)(2) 1頂点の周りがわかれば、あとは8点対称だから、正八面体。と、1点。



対称性に注意しながら、特に上下、左右、前後の軸の対称性に気をつけて、上面の点の数で場合分けして



4点のとり方は、4点のとり順を無視して  $\frac{8C_4}{2} = 35$

(i) 4点 上下に分かれて共通部分なし、これが上下・(上面では2点だが)左右・前後で3個。

(ii) 3点 (2)の場合、4(三角形の直角の角のとり方) × 2 = 8個の点

この、前後・左右を考えて、しかも2回ずつ数えているから、 $\frac{8 \times 3}{2} = 12$   $q_0 = \frac{12}{35}$  確定

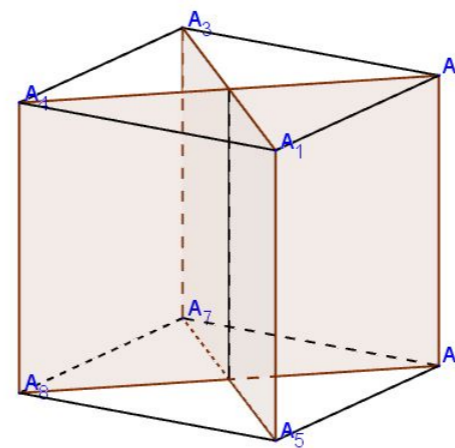
上の左の図の共通部分なし 4個  $p = \frac{3+4}{35} = \frac{1}{5}$  確定

上の右の図の立体(六面体に見えるが立体図形は確か) 4個の立体。

この、前後・左右を考えて、 $4 \times 3 = 12$  個の立体。 $p_3 = \frac{12+1}{35} = \frac{13}{35}$  確定

(iii) 2点

2点を正方形の辺上にとるのは上の4点の共通部分なしの前後・左右タイプで数え済み。



2点を正方形の対角線にとるのは、

下の2点のとり方が上とねじれの位置の正八面体が1個。

下の2点のとり方が上と平行の位置の線分が1個。

これの前後左右で3個の線分。 $p_1 = \frac{3}{35}$  確定

これで、すべて。 $q_2 = 0$  確定