サイクロイドの回転

円を滑らないようにしてできる図形がサイクロイド。なんと，そのサイクロイドを滑らないように回転せよという問題。これ，流行るかな？

18 慶応医 4 穴埋め問題を変更

媒介変数表示 $x=g(\theta)=\theta+\sin\theta, y=h(\theta)=1-\cos\theta \quad (-\pi<\theta<\pi)$ で表される座標平面上の曲線 C を考える。

(1) 曲線 C が x 軸に接する点の座標を求めよ。また，曲線 C 上の点の x 座標， y 座標の動く範囲をそれぞれ求めよ。

(2) (1) の範囲を満たす任意の x に対して，それを x 座標とする C 上の点 P はただ 1 つに決まることを示しなさい。また，この点 P の y 座標を $y=f(x)$ と書くとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であることを示しなさい。

(3) $0<t<\pi$ とする。曲線 C の $0\leqq\theta\leqq t$ に対する部分の長さ $L(t)$ を求めなさい。

(4) $0<t<\pi$ に対する曲線 C 上の点 $(g(t),h(t))$ を P_t とするとき，P_t における C の接線を l_t とし，l_t と x 軸との交点を Q_t とする。 Q_t の x 座標を求め，ベクトル $\overrightarrow{Q_tP_t}$ が x 軸の正の向きとなす角を求めなさい。

(5) 曲線 C が，x 軸に接しつつ，すべることなく右方向に回転する。回転する前の C 上の点 $P_t(g(t),h(t))(0<t<\pi)$ が x 軸との接点になるまで C が回転したとき，回転する前の点 $P_0(g(0),h(0))$ が点 $R_t(a(t),b(t))$ に移動したとする。$a(t),b(t)$ を t の式で表しなさい。

(6) 動点 $R_t(0<t<\pi)$ の軌跡， x 軸，および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，$\alpha=\lim\limits_{t\to\pi-0}a(t)$ とする。

(1) サイクロイドだが，その形はと

x 軸と共有点を持つのは $y=1-\cos\theta=0(-\pi<\theta<\pi)$ より，$\theta=0$ のみ，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ より $\theta=0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=0$ よって，$\theta=0$ つまり $(0,0)$ で x 軸に接する。

また，

θ	$-\pi$		0		π
$\frac{dx}{d\theta}$	0		$+$		0
x	$-\pi$		$\nearrow$		π
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	0
y	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

より求める範囲は，$-\pi<x<\pi, 0\leqq y<2$

(2) 増減表より明らか。$\dfrac{d^2y}{d^2x}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2}>0(-\pi<\theta<\pi)$ よって，下に凸。

(3) ここから回転する準備に入る。

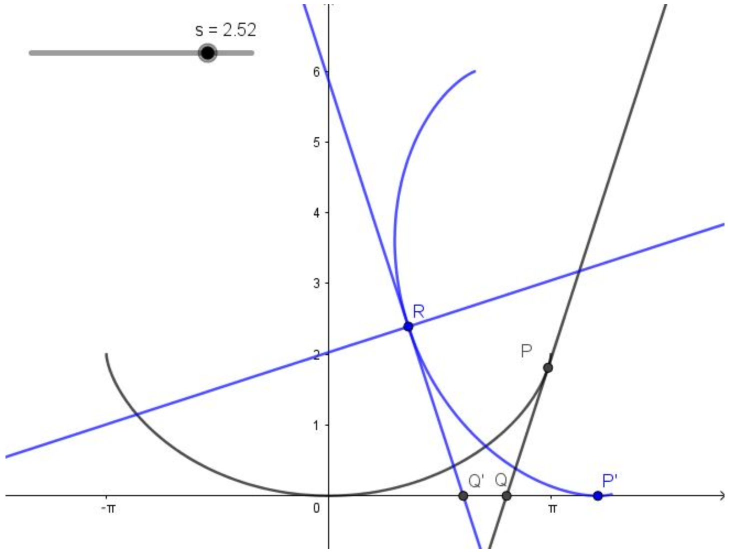
$$L(t)=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^t\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta=\sqrt{2}\int_0^t\sqrt{1+\cos\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^t\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=2\int_0^t\cos\frac{\theta}{2}d\theta=4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^t=4\sin\frac{t}{2}$$

(4) $l_t: y=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}(x-t-\sin t)+1-\cos t$ より， $y=0$ の x を求めて，$x=t$

$Q_t=(t,0), P_t=(t+\sin t, 1-\cos t)$ より，$\overrightarrow{Q_tP_t}=(\sin t, 1-\cos t)$ なので，

求める角の正接は $\dfrac{1-\cos t}{\sin t}=\dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\tan\dfrac{t}{2}$ つまり，求める角は $\dfrac{t}{2}$



(5) さあ，サイクロイドのサイクロイド？ポイントはすべらないので曲線の長さだ。

P の回転して x 軸に接した点を P' をすると，P'$(4\sin\frac{t}{2},0)$

もとの座標軸と回転した座標軸の関係に注意して，

$PQ=\sqrt{(t+\sin t-t)^2+(1-\cos t)^2}=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}=2\sin\dfrac{t}{2}$

よって，$P'Q'=2\sin\dfrac{t}{2}$ つまり Q'$(2\sin\frac{t}{2},0)$

$\angle PQP'=\angle P'Q'x'=\angle RQ'O, RQ'=t$ 直角三角形 RHQ'(H は R から x 軸におろした垂線の足) に着目して，$a(t)=2\sin\dfrac{t}{2}-t\cos\dfrac{t}{2}, b(t)=t\sin\dfrac{t}{2}$

(6) 積分計算のみ，

$\alpha=\lim\limits_{t\to\pi-0}a(t)=\lim\limits_{t\to\pi-0}\left(2\sin\dfrac{t}{2}-t\cos\dfrac{t}{2}\right)=2, a'(t)=\cos\dfrac{t}{2}-\cos\dfrac{t}{2}+\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{t}{2}=\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{t}{2}$ より，

求める面積 S は $S=\displaystyle\int_0^2 ydx=\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\sin^2\frac{t}{2}dt=\frac{1}{4}\int_0^\pi t^2(1-\cos t)dt$

ところで $\displaystyle\int t^2\cos tdt=t^2\sin t-\int 2t\sin tdt=t^2\sin t+2t\cos t-2\int\cos tdt$

$=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$ (C は積分定数) より

$$S=\frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t\right]_0^\pi=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right)=\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}$$