交代級数の収束

ベータ関数とΓ関数は極限値の問題としてよく出題される。

級数の和としてよく出題されるのがこれ。18 年度入試では両方が出題されている。

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\log 2$

18 名古屋 1

自然数 n に対し，定積分 $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき (1),(2) を用いて $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(1) $I_n+I_{n+2}=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$

(2) 積分値の大小は，積分関数の大小。$0 \leqq x \leqq 1$ なので，$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{x^2+1} \leqq 1$

$0 \leqq I_{n+1}=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx=I_n \leqq \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$

(3) (1)(2) を使い，$2I_n \geqq I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ より $nI_n=\frac{n}{2(n+1)} \geqq \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \to \frac{1}{2}(n\to\infty)$

$2I_n \leqq I_{n-2}+I_n=\frac{1}{n-1}$ より $nI_n \leqq \frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{n})} \to \frac{1}{2}(n\to\infty)$

よって，$\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}$

(4) (1) より，$I_1+I_3=\frac{1}{2}, -I_3-I_5=-\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{k-1}\{I_{2k-1}+I_{2k+1}\}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$

各式を加えて，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}=I_1+(-1)^{k-1}I_{2k+1}$

ここで，$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$

また，(2) より $I_n \to 0(n\to\infty)$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n \to \frac{1}{2}\log 2$

過去の北大の問題（2009 年度）にこれによく似た問題が出た。しかも，漸化式を使って $\frac{\pi}{4}$ になるもの。

もう一つは次の首都大。

18 首都大 1

(1) $x=\tan\theta$ とおくことにより，定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の値を求めなさい。

(2) k を 0 以上の整数とし，x を実数とする。次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$-x^{2k+2} \leqq \frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1} \leqq x^{2k+2}$

(3) $\int_0^1 \sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ であることと，(1) および (2) を利用して，

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ の和を求めなさい。

(1) $dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta, \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline \theta & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array}, \frac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta$ より $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(2) 等比数列の和の公式より $\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}=\frac{1-(-x^2)^{k+1}}{1+x^2}$ なので，

$-x^{2k+2} \leqq \frac{1}{1+x^2}-\sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1} \leqq x^{2k+2} \Leftrightarrow -x^{2k+2} \leqq \frac{(-x^2)^{k+1}}{1+x^2} \leqq x^{2k+2}$

$\Leftrightarrow -x^{2k+2}(1+x^2) \leqq (-x^2)^{k+1} \leqq x^{2k+2}(1+x^2) \Leftrightarrow -(1+x^2) \leqq (-1)^{k+1} \leqq 1+x^2, x=0$

$-(1+x^2) \leqq -1 \leqq (-1)^{k+1} \leqq 1 \leqq 1+x^2 (k=1,2,3,\cdots)$ は明らかなので，与不等式は示された。

(3) (2) より，$\frac{1}{1+x^2}-x^{2k+2} \leqq \sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1} \leqq \frac{1}{1+x^2}+x^{2k+2}$

0 から 1 までの定積分をして，

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1 x^{2k+2}dx < \int_0^1 \sum_{n=1}^{k+1}(-x^2)^{n-1}dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 x^{2k+2}dx$

(1) も利用して，$\frac{\pi}{4}-\left[\frac{x^{2k+3}}{2k+3}\right]_0^1 < \sum_{n=1}^{k+1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} < \frac{\pi}{4}+\left[\frac{x^{2k+3}}{2k+3}\right]_0^1$

$\left[\frac{x^{2k+3}}{2k+3}\right]_0^1=\frac{1}{2k+3} \to 0(n\to\infty)$ より，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \to \frac{\pi}{4}$

以下,「解析概論」から

交代級数（alternating series）項が交互に正負なる級数を交代級数という。

交代級数 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$ において，$a_n > a_{n+1}, \lim_{n\to\infty} a_n=0$ ならば，この級数は収束する。

同書の練習問題に

$a>0, b>0$ とすれば，$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots$

[注意] a, b が自然数なるとき，左辺を直接に計算すれば，右辺の級数の和が求められる。

例えば $a=b=1$ とすれば $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\log 2$

$a=b=2$ とすれば $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$　興味ある人は「高木貞治」再読にある。