Γ（ガンマ）関数・B（ベータ）関数

18 慈恵医科 2

n は自然数とし，微分可能な関数 $f_n(x)$ は等式 $f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+\displaystyle\int_0^x e^{-t}f_n(x-t)dt$ をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし， e は自然対数の底である。

(1) $\dfrac{d}{dx}f_n(x)$ を求めよ。

(2) m は 2 以上の自然数とする。 $x>0$ のとき，不等式 $e^{-x}x^m \leqq e^{-m}m^m$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

(1) $f_n(x-t)$ をなんとかするしかない。

$x-t=y$ とおくと $-dt=dy$， $\begin{array}{c|cc} t & 0 & x \\ \hline y & x & 0 \end{array}$ $\displaystyle\int_0^x e^{-t}f_n(x-t)dt=\int_0^x e^{y-x}f_n(y)dy=e^{-x}\int_0^x e^y f_n(y)dy$

よって $f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^y f_n(y)dy$ つまり　$e^x f_n(x)=x^{n+1}+\displaystyle\int_0^x e^y f_n(y)dy$

これで微分しやすくなって，$e^x f_n(x)+e^x f_n'(x)=(n+1)x^n+e^x f_n(x)$ つまり $f_n'(x)=(n+1)e^{-x}x^n$

これこれこれが，Γ関数 $\displaystyle\int_\infty^0 e^{-x}x^n dx$ 知っている人は，(3) の答は $(n+1)!$

(2) この不等式は何だろうと思いながらも，基本に戻って，

$g(x)=e^{-x}x^m$ とおいて，$g'(x)=-e^{-x}x^m+mx^{m-1}e^{-x}=-e^{-x}x^{m-1}(x-m)$

x	(0)		m	
g'		$+$	0	$-$
g		$\nearrow$	$e^{-m}m^m$	$\searrow$

よって　$e^{-x}x^m \leqq e^{-m}m^m$

(3) $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x (n+1)t^n e^{-t}dt=(n+1)\left\{\Big[-e^{-t}t^n\Big]_0^x+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt\right\}$

$=-(n+1)e^{-x}x^n+(n+1)n\displaystyle\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$

$=-e^{-x}\{(n+1)x^n+(n+1)nx^{n-1}+\cdots\}+(n+1)n(n-1)\cdots 1\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt$

$=-e^{-x}\{(n+1)x^n+(n+1)nx^{n-1}+(n+1)!\}+(n+1)!$

ここで (2) より，$e^{-x}x^{n+1}\leqq e^{-(n+1)}(n+1)^(n+1)$ つまり $0<e^{-x}x^n \leqq \dfrac{e^{-(n+1)}(n+1)^(n+1)}{x}$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^n=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f_n(x)=(n+1)!$

18 慶応 3 穴埋めを記述式に変更

$n=0,1,2,\cdots$ に対し，$a_n=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx$ とおく。

(1) a_1 を計算せよ。また，部分積分を用いて 2 以上の自然数 n に対して， a_n を a_{n-2} で表わせ。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ で， $a_n a_{n-1}$ を n を用いて表わせ。

(3) 数列 $\{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\}$ が 1 に収束することを証明しなさい。

(4)　以上の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n$ を求めよ。

こっちはベータ関数に関係して，極限に $\sqrt{\pi}$ が出てくる。

(1) $a_1=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac12}dx=\frac{\pi}{4}$ は置換積分してもいいが，半径 1 の円の 4 分の 1 の面積だから。

$x=\sin\theta$ とおくと $dx=\cos\theta d\theta$,$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline \theta & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}$,$(1-x^2)^{\frac{n}{2}}=\cos^n\theta$

よって，$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta d\theta=\Big[\sin\theta\cos^n\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\sin^2\theta d\theta$

$=n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta(1-\cos^2\theta)d\theta=n(a_{n-2}-a_n)$ これより，$a_n=\dfrac{n}{n+1}a_{n-2}$

(2) (1) の結果の式の両辺に a_{n-1} をかけて，$a_n a_{n-1}=\dfrac{n}{n+1}a_{n-1}a_{n-2}$

逐次降下して，$a_0=1$ より $a_n a_{n-1}=\dfrac{n}{n+1}\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{2}{3}a_1a_0=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$

(3) 挟み撃ちを使いたいから，不等式が欲しくなり，$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta d\theta\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=a_{n-1}$

よって，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\leqq 1$ (1) を使うことを考えて，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\geqq\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1(n\to\infty)$

(4) (3)(2) を使うと意識して，

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{a_n}{\dfrac{\pi}{2a_n(n+1)}}=\dfrac{2}{\pi}(n+1){a_n}^2=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{n+1}{n}(\sqrt{n}a_n)^2\to 1$

これで，収束することもいえて　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

この 2 題のような問題は過去に何度も出題されていて，それが Euler のガンマ関数とベータ関数。

$s>0$ で $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$，$s$ が自然数なら，$\Gamma(s)=s!$ 階乗を実数に拡張した感じ。

$p>0,q>0$ で $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\Gamma(\frac12)=\sqrt{\pi}$ なんて魅力的なものは大学で。

$\Gamma(\frac12)=\sqrt{\pi}$ を用いて，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ。

なんてのは今できる。この積分は Gauss 積分で，興味ある人は「野の石のページ」の「高木貞治」再読の Gauss 関数 Gauss 積分のところに東工大の過去問がある。

ここでもまた Euler と Gauss の活躍だ。