# 通過領域

**防衛医科 17-4**　以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上に一辺の長さが 8 の正方形 OABC を作る。A は $(8,0)$，C は $(0,8)$ とする。ある直線が辺 OC と AB 上を通り，OABC の面積を 2 等分するとき，この直線の傾きがとり得る範囲を求めよ。また、この条件を満たす直線が必ず通る点があればその座標を求めよ。

(2) 座標平面上に一辺の長さが 8 の正三角形 OAB を作る。O は原点，B は $(0,8)$，A は第 1 象限にあるものとする。ある直線が辺 OA と OB 上を通り，△OAB の面積を 2 等分するとき，この直線が △OAB 上に取りうる範囲を図示せよ。

(1) OC 上の点を $\mathrm{P}(0,p)$ とすると，対称性により，

AB 上の点は $Q(8,8-p)$。

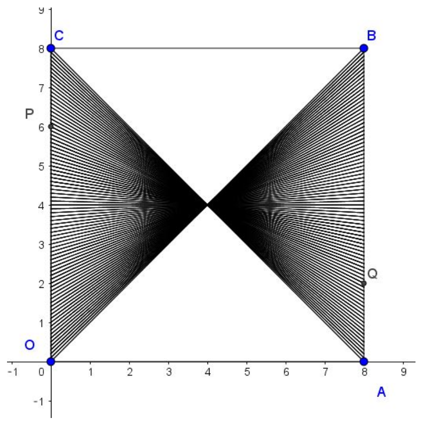
PQ を通る直線は $y=\dfrac{8-2p}{8}x+p$

つまり $4y=(4-p)x+4p$

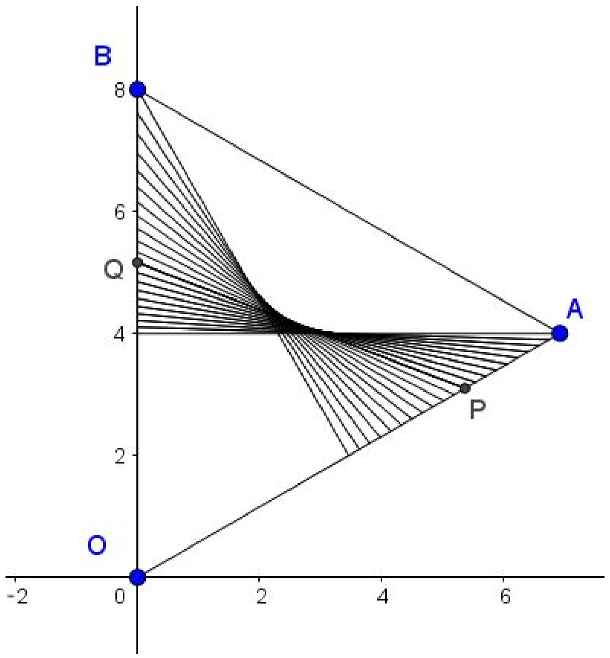
$p$ について整理すると，$(x-4)p+4(x-y)=0$

これは，$(4,4)$ を通る。

　数学オリンピック予選で見たことがある問題だ。




(2) の答を最初に見てしまおう。（なにせ，通過領域は作図ソフトではすぐかける）




(2) OA 上の点を $\mathrm{P}(\sqrt{3}p,p)$，OB 上の点を $Q(0,q)$ とおくと，

$2\cdot\dfrac{1}{2}OP\cdot OQ\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}8^2$。つまり $pq=16$(題意から $2\leqq p\leqq 4$)

さあ，直線 PQ の方程式は，$(p-q)x-\sqrt{3}p(y-q)=0$

ここからは，いつもの通り方法は 2 つ。

関数的にやれば，$y=\dfrac{p-q}{\sqrt{3}p}x+q$

$p$ を消去して，これを $4\leqq q\leqq 8$ の関数と見て値域を求める。

$$y=-\frac{x}{16\sqrt{3}}q^2+q+\frac{x}{\sqrt{3}}=-\frac{x}{16\sqrt{3}}\left(q-\frac{8\sqrt{3}}{x}\right)^2+\frac{4\sqrt{3}}{x}+\frac{x}{\sqrt{3}}$$

よって，
$$\begin{cases}4\leqq y\leqq -\sqrt{3}x+8\cdots 0\leqq x\leqq\sqrt{3}\\ 4\leqq y\leqq\dfrac{4\sqrt{3}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{3}}\cdots\sqrt{3}\leqq x\leqq\dfrac{4}{\sqrt{3}}\\ -\sqrt{3}x+8\leqq y\leqq\dfrac{4\sqrt{3}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{3}}\cdots\dfrac{4}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq 2\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}x+8\leqq y\leqq 4\cdots 2\sqrt{3}\leqq x\leqq 4\sqrt{3}\end{cases}$$

方程式的にやれば，$q$ を消去して $(p-\dfrac{16}{p})x-\sqrt{3}p(y-\dfrac{16}{p})=0$ これを $p$ の方程式と見て

$f(p)=(x-\sqrt{3}y)p^2+16\sqrt{3}p-16x=0$ が $2\leqq p\leqq 4$ に少なくとも 1 つ解をもつ条件を求める。

(i)$f(2)f(4)\leqq 0$ から $(\sqrt{3}x+y-8)(y-4)\leqq 4$

(ii) 判別式を $D$ とすると，$D/4=64\cdot 3+(x-\sqrt{3}y)\cdot 16x>0, f(2)<0, f(4)<0, 2<-\dfrac{8\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}y}<4$

$x<\sqrt{3}y$ に注意して，$y<\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{4\sqrt{3}}{x}, y>-\sqrt{3}x+8, y>4, \dfrac{x}{\sqrt{3}}+2<y<\dfrac{x}{\sqrt{3}}+4$

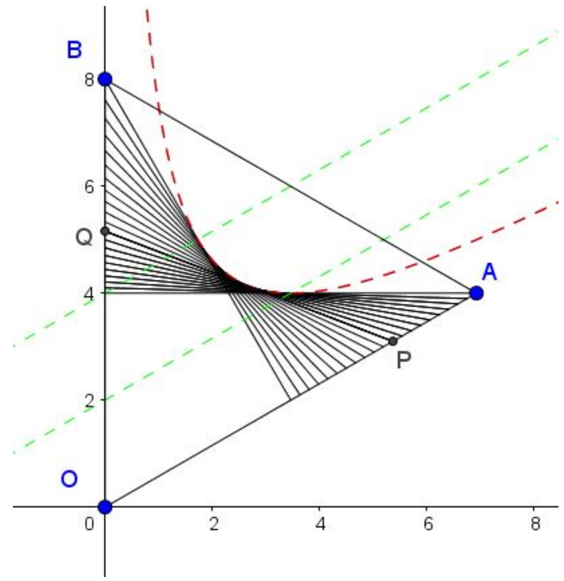
三角形の周及び内部で (i) または (ii) で上の答と一致。

いずれにしろ（この言葉は某クソ官僚が多用して嫌なイメージになりつつある），

$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{4\sqrt{3}}{x}$ のグラフは必要で

$y'=\dfrac{x^2-12}{\sqrt{3}x^2}$

| $x$ | $0$ | | $2\sqrt{3}$ | | $4\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | ／ | ↘ | $4$ | ↗ | |




どっちが楽なのかな？いずれにしろ（また使っちまった）いい問題なので余裕を持って楽しむにはいいが，試験の時間で完答するのは大変かな。