ベクトルが表す図形

横国って（一橋を意識してか）いたずらに難しい時がある。

横国 17-3

空間に 2 つの定点 O,A があり，$|OA| = 2$ をみたしている。

また，2 点 P,Q は次の条件をみたしながら動く。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \leqq 5, \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6, \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{5}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -2$

次の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値を求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) 線分 PQ が通過してできる部分の体積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ の図形的な意味がわかればいい。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ_P とすれば，$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cos\theta_P = 6$ つまり $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cos\theta_P = 3$

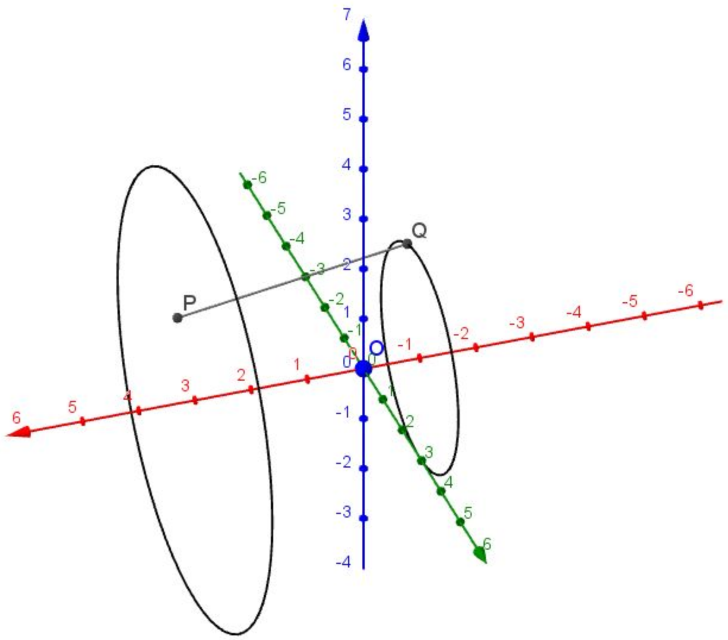
(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小になるのは $\cos\theta_P$ が最大（1）になるときで，最小値は 3。

でもいいが，$O = (0,0,0), A = (2,0,0)$ として考えると図形が見えてきて，

P は O を中心とする球の x 座標が 3（半径 4）の円の周及び内部にある。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ_Q とすれば，$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta_Q = -2$ つまり $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta_Q = -1$

Q は O を中心とする球の x 座標が -1 の円（半径 2）の周上にある。

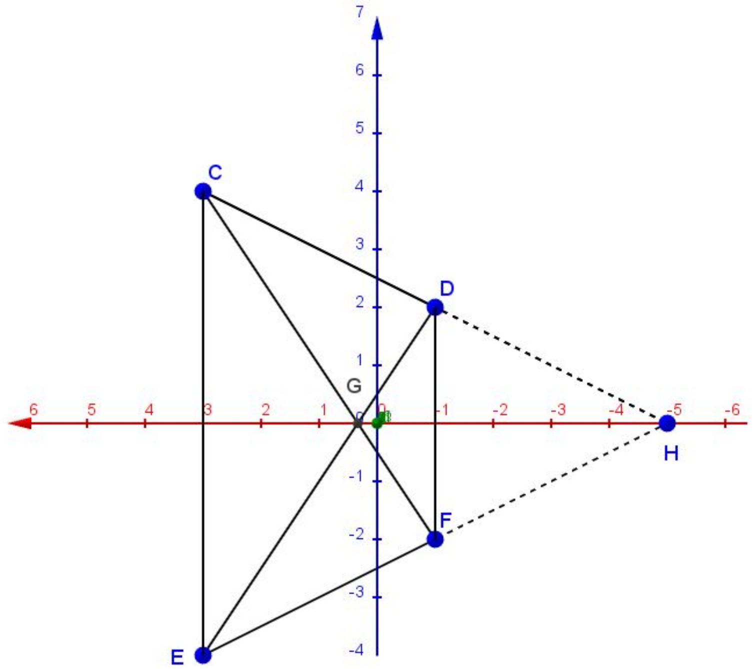


(2) P,Q の最も近い点は，例えば $P(3,0,2), Q(-1,0,2)$

P,Q の最も遠い点は，例えば $P(3,0,-4), Q(-1,0,2)$

よって $4 \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \leqq \sqrt{(-1-3)^2 + (2+4)^2}$ つまり $4 \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \leqq 2\sqrt{13}$

(3) 下は右から見た図で



求める体積は円錐台（図の CDFE を通る）から，円錐（GCD を通る）を引けばいい。

$\dfrac{1}{3}\pi\left(4^2 \cdot 8 - 2^2 \cdot 4 - 2^2 \cdot \dfrac{1}{3}(3+1)\right) = \dfrac{320}{9}\pi$

下の図，それっぽく見えます？