放物面と円柱の交わり

立体の体積の断面積が，高さの単純な関数でない難しい例の一つ。

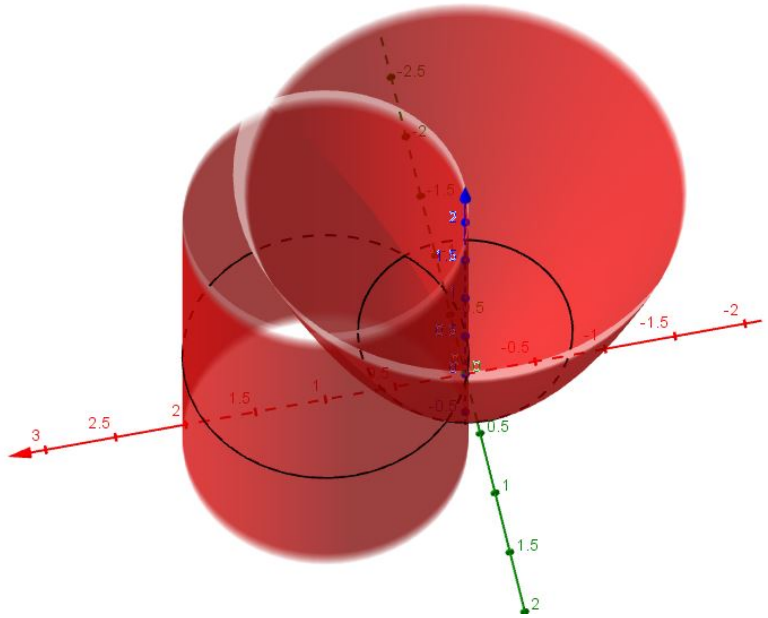
大阪 17-5

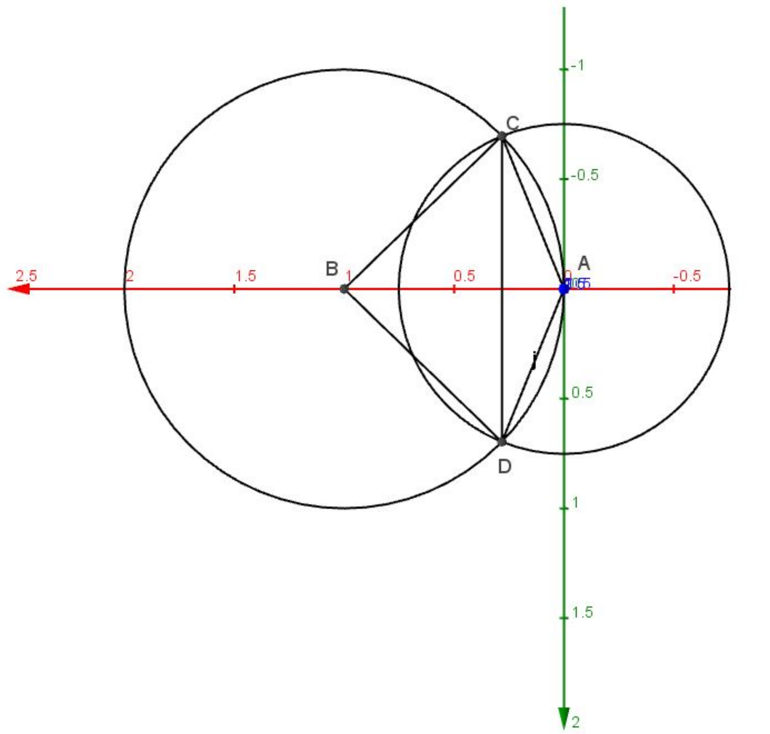
xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を， y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ をみたす実数とする。xy 平面上の点 $(0,t)$ を通り， y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2 \left(\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表わせ。

(2) M の体積 V を求めよ。

(1) 立体はこんな感じ。放物面の内側と円柱の内部の交わりのところ。で，下図は上から見たところ。





円 A $z^2+z^2=(2\cos\theta)^2$ と 円 B $(x-1)^2+z^2=1$ を連立すると，

C,D の x 座標は，$x=2\cos^2\theta$ つまり，$\angle CAB=\theta, \angle CBA=\pi-2\theta$

左の弓形と右の弓形に分けて

$S(t)=\pi(2\cos\theta)^2\dfrac{2\theta}{2\pi}-2\cos^2\theta\cdot 2\cos\theta\sin\theta+\pi\dfrac{2\pi-4\theta}{2\pi}-\cos(\pi-2\theta)\cdot 2\cos\theta\sin\theta$

$=4\theta\cos^2\theta-2\cos^2\theta\sin 2\theta+\pi-2\theta+\cos 2\theta\sin 2\theta$

$=2\theta(\cos 2\theta+1)-(\cos 2\theta+1)\sin 2\theta+\pi-2\theta+\cos 2\theta\sin 2\theta$

$=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$

(2) 置換積分するだけ

$V=\displaystyle\int_0^2 S(t)dt=\int_0^2(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)dt$

$t=(2\cos\theta)^2$ より $dt=4\cos\theta(-2\sin\theta)d\theta=-4\sin 2\theta$,

t	0	2
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

$V=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)4\sin 2\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-4\sin^2 2\theta+4\pi\sin 2\theta)d\theta$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-2+2\cos 4\theta+4\pi\sin 2\theta)d\theta$

$\displaystyle\int 4\theta\sin 4\theta d\theta=-\theta\cos 4\theta+\int\cos 4\theta d\theta=-\theta\cos 4\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta$ なので

$V=\left[-\theta\cos 4\theta+\dfrac{1}{4}\sin 4\theta-2\theta+\dfrac{1}{2}\sin 4\theta-2\pi\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[-\theta\cos 4\theta+\dfrac{3}{4}\sin 4\theta-2\theta-2\pi\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}+2\pi=\dfrac{3}{4}\pi$

CAS

1 Integral[(2 x cos(2 x)-sin(2 x)+pi)4 sin(2 x), pi/4, pi/2]

$\rightarrow \dfrac{3}{4}\pi$