双曲線が回る

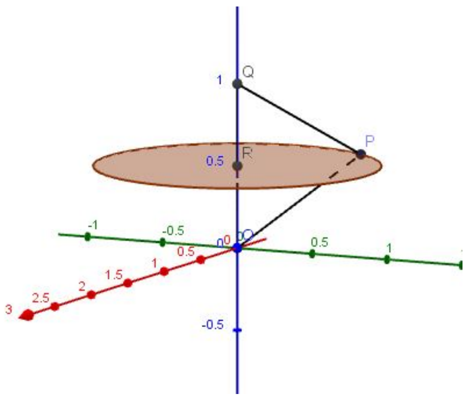
東大の立体。

東大 17-6 点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1,0,0) に対して，$\angle AOP$ を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。
(1) 点 Q が (0,0,1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。
(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

(1)

$OP=OQ=1$ より，点 P は，平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上の $(0,0,\dfrac{1}{2})$ 中心，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円上を動く。

よって，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$30° \leqq \theta \leqq 150°$



(2) 点 P の通過するのは，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$ として，R 中心，半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円。（ただし，$OQ \perp PR$）

辺 OP は円錐を描く。これで，Q が $x=0$ 上の O 中心半径 1 の円を動く。

この体積を求めるには，Q が x 軸の周りに回転するので，平面 $x=k(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ で切断した図形を x 軸の周りに回転すればいい。円錐の方程式は $x^2+y^2=(\sqrt{3}z)^2$

$x=k(k \geqq 0)$ として，$y^2-3z^2=-k^2$ これは双曲線，$\dfrac{y^2}{k^2}-\dfrac{z^2}{\frac{k^2}{3}}=-1\left(\dfrac{k}{\sqrt{3}} \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}\right)$

$(k,0,0)$ から遠い点は $z=\dfrac{1}{2}$ に対応する $y^2=\dfrac{3}{4}-k^2$，近い点は $(k,0,\dfrac{k}{\sqrt{3}})$

断面積は $\pi(y^2+z^2)-\pi\dfrac{k^2}{3}=\pi(1-k^2-\dfrac{k^2}{3})=\pi(1-\dfrac{4}{3}k^2)$

よって求める体積は，対称性により $2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-\frac{4}{3}k^2)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$

右の上の図が平面で切った所，下の図が円錐を回した所。

球から円錐を引いたように見えるけど，答が違うから違うんだろう。