循環する解を持つ3次方程式

17 年度私立の入試問題の中では，早稲田のセットが面白かった。

早稲田 17-5 3 次の整式 $f(x) = x^3 + x^2 + px + q = 0$（ただし，$p \neq q, q \neq 0$ ），
および $g(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ が次の条件 (*) をみたすとする。
(*) $f(x) = 0$ の任意の解 α に対して $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である。
次の問いに答えよ。
(1) p, q の値を求めよ。
(2) $f(x) = 0$ は $-2 < x < 2$ の範囲に 3 つの実数解をもつことを示せ。
(3) $f(x) = 0$ の任意の解を $2\cos\theta$ とするとき， $2\cos 2\theta, 2\cos 3\theta$ も解であることを示せ。
(4) $2\cos\theta (0 < \theta < \pi)$ が $f(x) = 0$ の解であるとき，θ の値を求めよ。

解けても不思議感が残る問題です。その裏を解説しましょう。まず解答例。

(1) $p \neq q, p \neq 0$ より，$\alpha \neq 1, \alpha \neq 0$

$g(\alpha) = \dfrac{-1}{\alpha+1}$ が解なので，$g(g(\alpha)) = \dfrac{-1}{\dfrac{-1}{\alpha+1}+1} = -1 - \dfrac{1}{\alpha}$ も解，$g(g(g(\alpha))) = \dfrac{-1}{-1-\dfrac{1}{\alpha}+1} = \alpha$

よって，3 次方程式の解が $\alpha, \beta = \dfrac{-1}{\alpha+1}, \gamma = -1 - \dfrac{1}{\alpha}$ となればいい。
解と係数の関係で，$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p, \alpha\beta\gamma = -q$ 代入して整理すると
$\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \cdots$①$, p = \dfrac{\alpha}{\alpha+1} - \dfrac{1}{\alpha} + \alpha + 1, q = -1$
すべて成立するのは，$p = -2, q = -1$

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ より $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = (x+1)(3x-1)$

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		2
f'		$+$	0	-	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{41}{27}$	$\nearrow$	7

(3) 2 倍角，3 倍角の公式を使って，$2\cos\theta = \alpha$ とおくと，$2\cos 2\theta = \alpha^2 - 2, 2\cos 3\theta = a^3 - 3\alpha$
① を使って，上と同じく解と係数の関係でやってもいいが，
$\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = (\alpha^2 - 2)(\alpha + 1) + 1 = 0$ より，$\alpha^2 - 2 = \dfrac{-1}{\alpha+1} = \beta$
①より $\alpha^3 - 3\alpha = -\alpha^2 - \alpha + 1$ よって $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = (-\alpha^2 - \alpha + 1)(-\alpha) - \alpha - 1 = 0$ で $-\alpha^2 - \alpha + 1 = -1 - \dfrac{1}{\alpha} = \gamma$ とすると上を使える。

(4) $2\cos\theta, 2\cos 2\theta$ が解なら $2\cos 4\theta$ も解となり，それは $2\cos 3\theta$ なので
$\cos 4\theta = \cos 3\theta$ より $4\theta = \pm 3\theta + 2n\pi$($n$ は整数)
$0 < \theta < \pi$ なので $\theta = \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}, \dfrac{6\pi}{7}$

だいぶ前に解が循環する 3 次方程式（結構入試に出ている，早稲田は過去問にもあり）を調べて，数研通信に載せたことがあった。興味ある人はどうぞ。

https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/57/57-4.pdf

さて種明かしと。
解が循環する方程式ですぐ浮かぶのが，**1 の素数乗の原始根**。
例えば $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ を求めるのは，図から求める方法もあるが，$x^5 = 1$ を解く方法もある。
$x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \cdots$②
②は相反方程式といって，$x \neq 0$ より x^2 で割り $x + \dfrac{1}{x} = t$ とおくのでした。
すると，$t^2 - 2 + t + 1 = 0$ つまり $t^2 + t - 1 = 0$ なので $t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
ところで，$x = \cos\theta + i\sin\theta$ とおけて $x^5 = 1$ より $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$ なので $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
すなわち $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$x^7 = 1$ でやってみると，それがこの問題です。
$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ から $x^3 + x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 0$
$(t^3 - 3t) + (t^2 - 2) + t + 1 = 0$ に対応してるのが $\alpha + \beta + \gamma = -1$
整理すると $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ この解は $2\cos\theta, 2\cos 2\theta, 2\cos 3\theta$
$\theta = \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}, \dfrac{6\pi}{7}$
スッキリしました？

途中をよく見ると，2 倍角の公式とか 3 倍角の公式の求め方も見れます。
$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$ が $2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 - 2, x^3 + \dfrac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ が $2\cos 3\theta = (2\cos\theta)^3 - 3(2\cos\theta)$

あるいは又，$\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$ の値を求めよ，とか。（答 $-\dfrac{1}{2}$）