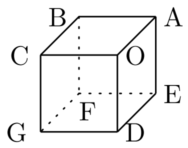
立方体の体積

16 香川

図のような，1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG を考える。
対角線 OF 上に点 P をとり，$OP = x$ とする。
(1)　点 P を通り対角線 OF と直交する平面で，
立方体 OABC-DEFG を切る。
その切り口の多角形の面積 $S(x)$ を x を用いて表せ。
(2)　関数 $y = S(x)$ のグラフをかけ。
(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} S(x)dx$ を求めよ。



昔，京大で「OF を軸として回転してできる立体の体積を求めよ」という問題が出題されたが，この問題は断面が単純な円ではないので，さらに難しそうだ。
これを試験時間の中でこなすには，どうやるんだろうな。まあ，医学科の振り分けのための問題なんだろうが。

(1) $OF = \sqrt{3}$ で

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

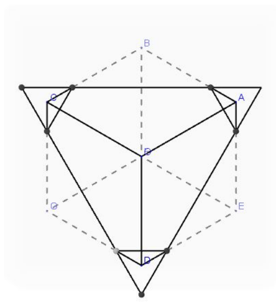
OA を X 軸，OC を Y 軸，OD を Z 軸となるように座標を決めると，P を通る対角線 OF に直交する平面の方程式は $X + Y + Z = \sqrt{3}x$ なので，$X = Y = 0$ として $Z = \sqrt{3}x$

切り口は一辺 $\sqrt{6}x$ の正三角形となり，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}x)^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

(ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

$X = 0, Y = 1$ として $Z = \sqrt{3}x - 1$

切り口は右の図の六角形で，
一辺 $\sqrt{6}x$ の正三角形から，一辺 $\sqrt{2}(\sqrt{3}x - 1)$ の正三角形を 3 個
引けばいいので



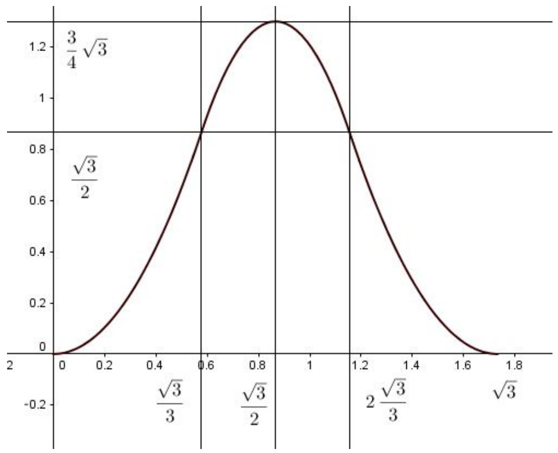
$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{(\sqrt{2}\sqrt{3}x)^2 - 3\cdot(\sqrt{2}(\sqrt{3}x - 1)^2\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}2\left\{3x^2 - 3\cdot(\sqrt{3}x - 1)^2\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{3x^2 - 3\cdot(\sqrt{3}x - 1)^2\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(-6x^2 + 6\sqrt{3}x - 3)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{-6\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right\}$$

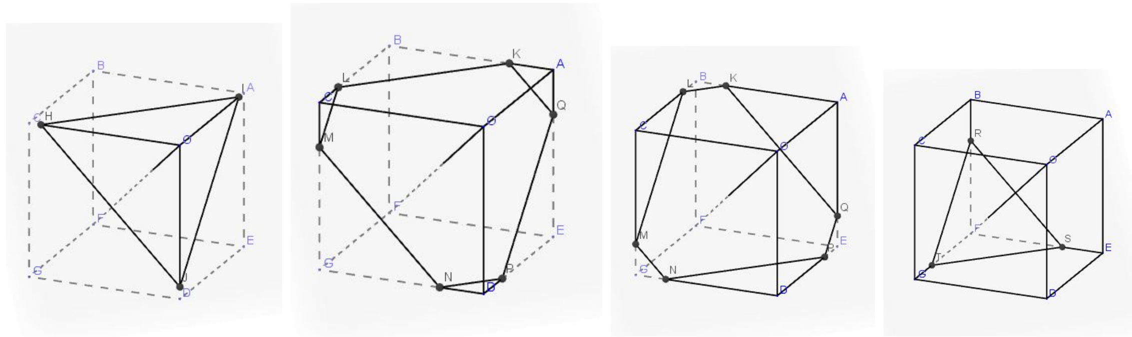
(iii) $2\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ のとき

　(i) との対称性で，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3})^2$

よって，グラフの概形は右図。



積分する前に，問題を眺めてみると



さて，(3)。積分区間が何故 0 から $\sqrt{3}$ ではないのだろうと思うと，そうか！$\sqrt{3}$ まで積分すれば 1 に決まってる。問題にならない。すると，下のようにもいけることに気づく。

対称性から，$0 < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ と $2\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \sqrt{3}$ とで，正三角錐。

三角錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{6}$ だから，残りの体積は，$1 - 2\dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

すると，求める積分（体積）は，$\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6}$　でいいわけで，積分しなくてすむ。

真ん中の体積が知りたくなければ $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ でもちろんいい。

真ん中の体積は，正六角形の面積は割りと簡単に $6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = \dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ とわかるので

シンプソンの定理を使えば $\dfrac{1}{6}\left(2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\right)\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$

以下は，Geogebra ですべてやったところ。