見通しの良い複素数平面問題の解き方

16 年からは整数論と複素数がおおっぴらに出題できる。
複素数平面（計算については別の機会で）の問題の見通しの良い解き方を，まとめてみた。
ついでに，目で見えるように Geogebra での複素数の扱い方も紹介する。
見通しが効くためには，少し上に登る必要がある。**一次分数変換**は知っていても損はない。
まず，複素数平面で図形を表す方法について。
以下断りなければ，ギリシャ文字と z,w は複素数，アルファベットは実数とする。
教科書は，アポロニウスの関係で直線と円の方程式を求めてます。
定点との長さの比だから，長さから $|z|^2=z\bar{z}$ で共役複素数が出てくるわけだ。
ちょっと視点を変えて，z だけなら点を表す。図形なら方程式，つまり 2 つの文字 x,y を使う。
そこで複素数では $\bar{z}$ の登場となる。

$z=x+yi$ つまり $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}, y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

問 1　直線の方程式は $l: ax+by+c=0, \left(a^2+b^2 \neq 0, l \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ となることを使って，
複素数平面上の直線の方程式は $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0 \cdots ①$ となることを示せ。

$a\dfrac{z+\bar{z}}{2}-b\dfrac{z-\bar{z}}{2}i+c=0$ つまり $\dfrac{a-bi}{2}z+\dfrac{a+bi}{2}\bar{z}+c=0$

$\dfrac{a+bi}{2}=\alpha$ とおけば $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$ とかける。これは $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ つまり α に垂直。

① は α に垂直ということもわかります。
複素数独自でも分析できます。

問 2
$\alpha /\!/ \beta$ と $\alpha \perp \beta$ を複素数の関係式で表わし，それを使って
① の式が α に垂直で $-\dfrac{c}{2|\alpha|^2}\alpha$ を通る直線を表すことを示せ。

$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta=0, \alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=0$

$① \Leftrightarrow \bar{\alpha}\left(z+\dfrac{c}{2|\alpha|^2}\alpha\right)+\alpha\overline{\left(z+\dfrac{c}{2|\alpha|^2}\alpha\right)}=0$

次に円，は入試問題を使うか。

16 広島
(1) a,b を複素数とする。$z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+b=0$ を満たす点 z の全体が複素数平面上の円となるための，a,b に関する条件を求めよ。

変形して $(z-\bar{a})(\bar{z}-a)=a\bar{a}-b$ よって $|z-a|^2=|a|^2-b$　だから b は実数で，$|a|^2-b>0$

ということで，複素数平面上の円（または直線）は $kz\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$ なる形をしている。
（ $k=0$ なら直線，$k \neq 0$ なら円）
（ちなみに，直線は無限遠点を通る円として，円と直線を一つのものとして扱うのが，大学での行き方）

さて，変換です。教科書・入試とも一次分数変換だらけです。
$w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$(ただし$\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$) なる変換を一次分数変換（**メビウス Möbius 変換**）という。
・合同変換が表せる。
平行移動（$w=z+\beta$）点に関する対称移動（$w=-z$）回転移動（$w=\alpha z$(ただし $|\alpha|=1$)）
・相似変換が表せる。相似回転（$w=\alpha z$(ただし $|\alpha| \neq 1$)）
・円に関する対称移動（鏡映）らしきもの（反転）　$w=\dfrac{1}{z}$

(2) a,b は複素数で，$|a| \neq 1, ab \neq 0$ とし，$z=\dfrac{ab}{w+a}$ とする。複素数平面の点 w が原点 O と中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 z はどのような図形を動くか。
(3) a,b,c は複素数で，$|a| \neq 1, ab \neq c$ とし，$z=\dfrac{bw+c}{w+a}$ とする。複素数平面上の点 w が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 z はどのような図形を動くか。

(2) $ab \neq 0$ より $z \neq 0$ なので $w=\dfrac{ab-az}{z}$ これを $|w|=1$ に代入して整理すると，$|a||z-b|=|z|$
$|a| \neq 1$ より アポロニウスの円となり，
原点と点 b を $|a|:1$ に内分する点 （$\dfrac{|a|}{|a|+1}b$）と外分する点（$\dfrac{|a|}{|a|-1}b$）
の中点（$\dfrac{|a|^2}{|a|^2-1}b$）が中心，半径 $\left|\dfrac{ab}{|a|^2-1}\right|$ の円。

(3) $ab \neq c$ より $z=b+\dfrac{c-ba}{w+a}, z \neq b$ なので $w=\dfrac{c-ab}{z-b}-a$ これを $|w|=1$ に代入して整理すると，
$|a|\left|z-\dfrac{c}{a}\right|=|z-b|$ これは $|a| \neq 1$ より アポロニウスの円となり，
点 b と 点 $\dfrac{c}{a}$ を $|a|:1$ に内分する点 （$\dfrac{b+\frac{c}{a}|a|}{|a|+1}b$）と外分する点（$\dfrac{-b+\frac{c}{a}|a|}{|a|-1}b$）
の中点（$\dfrac{\bar{a}c-b}{|a|^2-1}$）が中心，半径 $\left|\dfrac{ab-c}{|a|^2-1}\right|$ の円。

答が円になるのは偶然ではなく，円（または直線）は一次分数変換によって，円（または直線）に移される（**円円変換**という）。
合同変換，相似変換は明らかだから $w=\dfrac{1}{z}$ だけで確認すると，
$kz\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+c=0$ に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入して整理すると，$cw\bar{w}+\alpha w+\bar{\alpha}\bar{w}+k=0$ で，円か直線。
円が直線になったりするのも，どういうときかもすぐわかる。変換の分母を 0 にするような点が元の図形に含まれていれば，直線になる。この問題では $z=-a$ が単位円上にないので，直線にならずに円になる。
一次分数変換は，**等角変換**ともいい，角度を変えない性質もある。これについては入試問題検索中。

いい例として，**17 年早稲田**の問題。

> $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ とおき，複素数 $1,\alpha,\bar{\alpha}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P,Q,R とする。次の問いに答えよ。
> (1) 直線 PQ は複素数 β を用いて方程式 $\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+1=0$ で表される。この β を求めよ。
> (2) 点 z が直線 PQ 上を動くとき，点 $w=\dfrac{1}{z}$ が描く複素数平面上の図形を求めよ。
> (3) 点 z が三角形 PQR の周および内部を動くとき，点 $w=\dfrac{1}{z}$ の動く範囲を複素数平面上に図示し，その面積を求めよ。

解析幾何の方法（複素数がわからなくなったら最後はこれ）と複素数の方法（せっかく複素数を使っているのだから，こっちがベター）を両方やってみよう。

(1) $\mathrm{P}(1,0),\mathrm{Q}(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}),\mathrm{R}(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6})$ より

直線 PQ : $x+\sqrt{3}y-1=0\cdots①$

これに $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ を代入して整理

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z}+1=0$$

よって $\beta=\dfrac{\bar{\alpha}-1}{\alpha-\bar{\alpha}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) $z=\dfrac{1}{w}$ より，変換も xy 平面上で

$$x+yi=\frac{1}{u+vi}=\frac{u-vi}{u^2+v^2}\ \text{つまり}$$

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}\cdots②$$

① へ代入して整理 $(u-\frac{1}{2})^2+(v+\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1$

つまり，中心 $-\beta$ 半径 1 の円，ただし原点を除く。

(3) $x+\sqrt{3}y-1\leqq 0,x-\sqrt{3}y-1\leqq 0,x\geqq\frac{1}{2}$

②を代入して整理

$$(u-\frac{1}{2})^2+(v+\frac{\sqrt{3}}{2})^2\geqq 1$$

$$(u-\frac{1}{2})^2+(v-\frac{\sqrt{3}}{2})^2\geqq 1$$

$$(u-1)^2+v^2\leqq 1$$

(1) 直線 PQ: $\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{z-1}\right)}=\dfrac{z-\alpha}{z-1}$ を整理して

$$(\bar{\alpha}-1)z+(1-\alpha)\bar{z}+\alpha-\bar{\alpha}=0$$

$$\frac{\bar{\alpha}-1}{\alpha-\bar{\alpha}}z+\frac{1-\alpha}{\alpha-\bar{\alpha}}\bar{z}+1=0$$

よって $\beta=\dfrac{\bar{\alpha}-1}{\alpha-\bar{\alpha}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2) $z=\dfrac{1}{w}$ より，複素数の変換

$\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+1=0$ に代入して整理

$|w+\beta|=|\beta|=1$

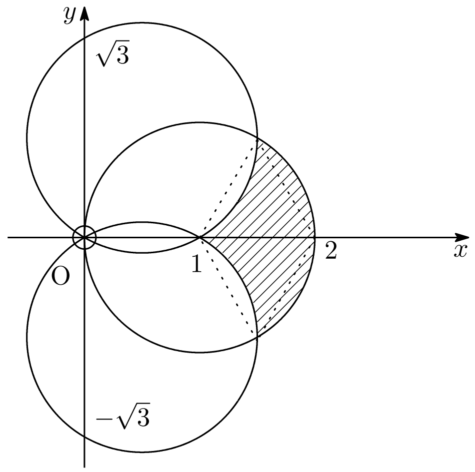
つまり，中心 $-\beta$ 半径 1 の円，ただし原点を除く。

(3) $\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+1\geqq 0,\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+1\geqq 0,\dfrac{z+\bar{z}}{2}\geqq\dfrac{1}{2}$

（原点を含んでいるいないで，
不等号の向きは決めることができる）

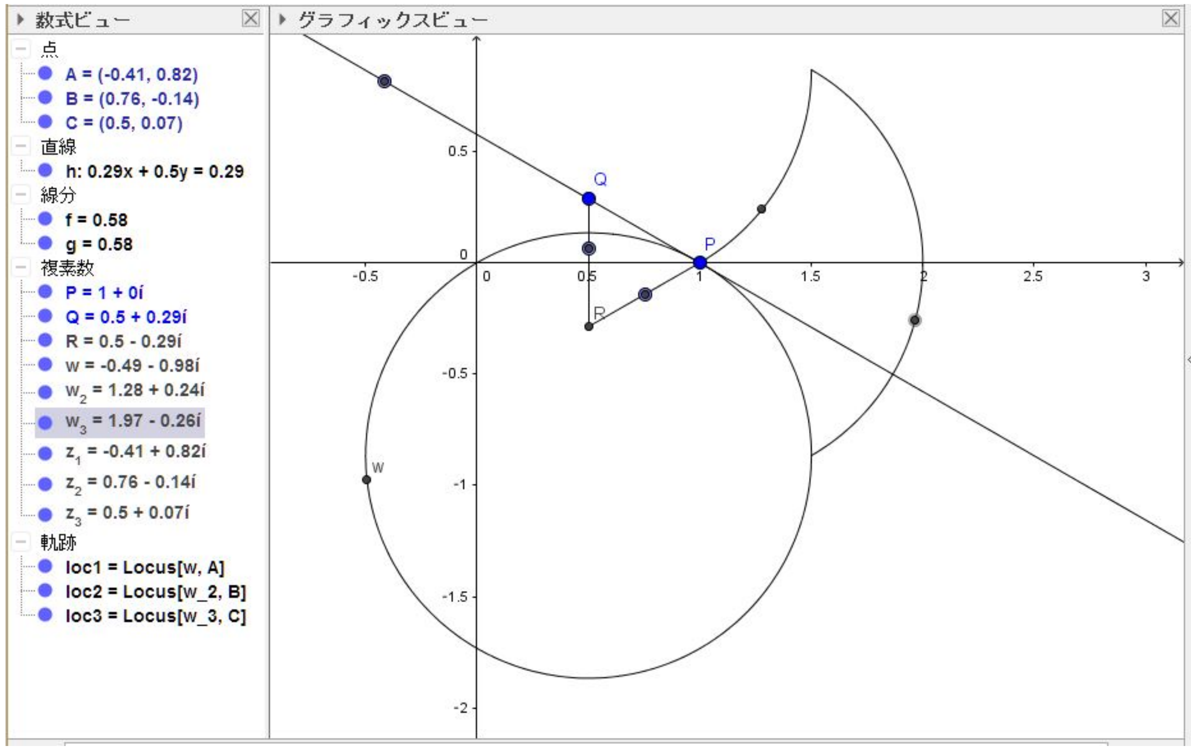
$z=\dfrac{1}{w}$ を代入して整理

$|w+\beta|\geqq 1,|w+\bar{\beta}|\geqq 1,|w-1|\leqq 1$



斜線の部分の面積は 1 辺 1 の正三角形の 2 倍，つまり $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よくできた問題。



Geogebra は複素数も扱える。（虚数単位は Alt 押しながら i ）

変換前の図形上の点をとり，それを複素数に変換し（ z は z 軸の z と混同するのか使えないので z_1 ），$w=\dfrac{1}{z_1}$ で変換する。

Locus[軌跡を知りたい点, 動く要素] とすると，一気に軌跡も，かいてくれる。

たまに，一次分数変換でないものも出題され，$w=\overline{z}$ （直線に関する対称変換）とか，次の問題のようなもの。

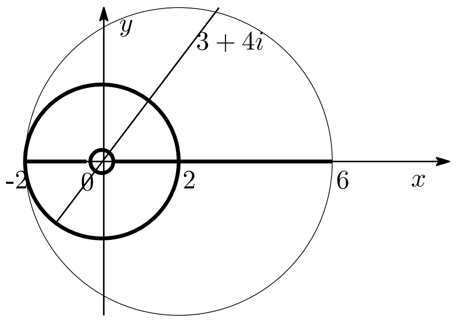
16 青学　0 でない複素数 z に対し，$w=z+\dfrac{4}{z}$ とする。
(1) z が複素数平面上で円 $|z|=1$ を動くとき，w が複素数平面上で描く図形を図示せよ。
(2) w が実数となるような z 全体が表す複素数平面上の図形を図示せよ。
(3) z が (2) で求めた図形上にあって，かつ $|z-2|\leqq 4$ であるとき，$|z-3-4i|$ の最大値を求めよ。

z について解くのが複雑そうなので，前問とは方針を変える。
複素数の問題というのは，一般的に次の 3 方法がある。
(i) なるべく複素数の問題として解く。($z\overline{z}=|z|^2$ を使って)
(ii) 極形式に直して解く。($z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$)
(iii) 直行形式に直して解く。($z=x+yi$(x, y は実数))

(1) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおけて，$w=\cos\theta+i\sin\theta+\dfrac{4}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta+4(\cos\theta-i\sin\theta)$
$=5\cos\theta-3i\sin\theta=x+yi$ とすると，楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

(2) $w=\overline{w}$ より $z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ これを整理すると，$\left(z-\overline{z}\right)\left(1-\dfrac{4}{z\overline{z}}\right)=0$
よって，$z=\overline{z}$ （原点を除く実軸）または $|z|=2$（原点中心半径 2 の円）

(3)



左図により，最大値 2+5=7
$z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$ のとき