見通しが良い整数問題の解き方

16 年からは整数論と複素数がおおっぴらに出題できる。
頻出問題の見通しの良い解き方を，整数問題に苦手意識のある生徒のためにまとめてみた。ついでに，自分で検算できるように Maxima での答えの出し方も紹介する。
見通しが効くためには，少し上に登る必要がある。合同式とかオイラーの定理は知るべきでしょう。
まず，整数解方程式。ディオファントス方程式。

16 福井
(1) 方程式 $65x+31y=1$ の整数解をすべて求めよ。
(2) $65x+31y=2016$ を満たす正の整数の組 (x,y) を求めよ。
(3) 2016 以上の整数 m は，正の整数 x,y を用いて $m=65x+31y$ と表せることを示せ。

特殊解が見つからないときは，互除法で見つけるのだが，いささか面倒くさい。見通し良く見つけるには，合同式（連分数を使う方法もあるが）まずこれを使ってすぐに発見できたことにしてしまえ。

(1) $65x+31y=1$
$65(-10)+31(21)=1$ より
$65(x+10)+31(y-21)=0$
65 と 31 は互いに素なので k を整数として
$x=-10+31k, y=21-65k$

見通しが良い特殊解の見つけ方は
$65x\equiv 1(\mod 31)$
$3x\equiv 1\cdots$①$(65\equiv 3$ より$)$
$63x\equiv 21$
$x\equiv 21\equiv -10(63\equiv 1$ より$)$
$y=\dfrac{1+65*10}{31}=21$

(2) $2016\times 65x+2016\times 31y=2016$ より
$x=2016\times 10+31k>0, y=2016\times 21-65k>0$
よって $k>\dfrac{20160}{31}>650, k<\dfrac{2016\cdot 21}{65}<651$
$k=651$ を代入して，$(21,21)$

(3) $m\times 65x+m\times 31y=m$ より
$x=m\times 10+31k>0, y=m\times 21-65k>0$
よって $\dfrac{10m}{31}<k<\dfrac{21m}{65}$
$m\geqq 2016$ なので
$\dfrac{21m}{65}-\dfrac{10m}{31}=\dfrac{m}{2015}\geqq 1$
よって，整数 k が存在するので題意は示された。

$65x+31y=1$ は整数解をもち
$65x+31y=65*31=2015$ は $\dfrac{x}{31}+\dfrac{y}{65}=1$
格子点 (31,0),(0,65) はこの直線上。
これより上で平行な直線
$65x+31y=m(m\geqq 2016)$
は第 1 象限の部分に格子点をもつ。

Maxima では gcdex というマクロをロードして

```
(%i1) load(gcdex)$
(%i2) igcdex(65,31);
```

$$[-10,21,1] \qquad \text{(\%o2)}$$

これは Maxima を TeX 形式でコピーして貼り付けたまま。
最初の 2 個が特殊解で，最後の 1 が最大公約数。

ディオファンタス方程式は，2 元 1 次合同方程式ということで，次は 2 元 2 次合同方程式となるが，これは合同式の因数分解をすればいいので，わりと解法は定型化しているが。
見通しが良くなくても，調べる範囲がわかっていれば実数と違って整数は有限個しか無い。つまり，必要条件で範囲をせばめればこっちのもんだ。

16 北海道
x,y を自然数とする。
(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。
(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x,y) をすべて求めよ。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}\geqq 1$ より $x^2+2>0$ なので
$x^2-3x+2\leqq 0$
$(x-1)(x-2)\leqq 0$
$1\leqq x\leqq 2$
これをみたす自然数は $x=1,2$
このとき，ともに $\dfrac{3x}{x^2+2}=1$
よって求める自然数は $x=1,2$

x が大きくなれば分母のほうが大きくなるから，
0 に近づく。
文系なら，逆数をとり，相加相乗平均かな。
$\dfrac{x^2+2}{3x}=\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\geqq\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
よって $\dfrac{3x}{x^2+2}\leqq\dfrac{3\sqrt{2}}{4}<2$ で $\dfrac{3x}{x^2+2}=1$
とにかく，範囲をせばめることを考える。

(2) (1) より $(1,1),(2,1)$ がまず解となり，以下 $x\geqq 3, y\geqq 2$ とする。
すると $\dfrac{3x}{x^2+2}<1, \dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<2$ より $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}=1\cdots *$
すると $\dfrac{3x}{x^2+2}=1-\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{2}$
(1) と同様に
$x^2-6x+2\leqq 0$
$3-\sqrt{7}\leqq x<\leqq 3+\sqrt{7}$
これをみたす 3 以上の自然数は 3,4,5 のみ
$x=3$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$ *をみたす 自然数 y はない
$x=4$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{2}{3}$ *をみたす 自然数 y は 3
$x=5$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{5}{9}$ *をみたす 自然数 y はない
よって，求める解は $(1,1),(2,1),(4,3)$

x,y が大きくなるとどうせ解をもちそうもないから，

```
(%i1) for x:1 thru 50 do for y:1 thru 50 do if integerp(3*x/(x^2+2)+1/y) then print(x,y)$
```

$$1,1$$
$$2,1$$
$$4,3$$

もう一つの頻出問題は繰り返して循環を見つける問題。

16 九州後期

(1) 2016 と $2^{2016}+1$ は互いに素であることを証明せよ。
(2) $2^{2016}+1$ を 2016 で割った余りを求めよ。
(3) $2^{2016}(2^{2016}+1)(2^{2016}+2)\cdots(2^{2016}+m)$ が 2016 の倍数となる最小の自然数 m を求めよ。

数学オリンピックのような問題作ってます。

(1) $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ なので
$2^{2016}+1\equiv 1(\mod 2)$
$2^{2016}+1\equiv (-1)^{2016}+1\equiv 2(\mod 3)$
$2^{2016}+1\equiv 2^{6\cdot 2^4\cdot 3\cdot 7}+1\equiv 1+1\equiv 2(\mod 7)$
よって，題意は示された。

(2) $2^{10}+1$ までは 2016 より小さく
$2^5+1=33, 2^{11}+1=2049\equiv 33(\mod 2016)$
よって 2^n+1 の余りは最初の 4 個を除いて
33 から周期 6 で循環する。
$2016-4=2012\equiv 2(\mod 6)$ なので，
求める余りは 2^6+1 のときと同じ，65。

(3) $\mod 2016$ で
$2^{2016}(2^{2016}+1)(2^{2016}+2)\cdots(2^{2016}+m)$
$\equiv 1\cdot 65\cdot 66\cdots(65+m-1)$
まずは $\mod 7$ で 0 になる最小の m を求めると
$64+m\equiv 0$ のときで，それは
$m\equiv -64\equiv -1\equiv 6(\mod 7)$
つまり $m=6$ が必要で，このとき，
$2^{2016}(2^{2016}+1)(2^{2016}+2)\cdots(2^{2016}+6)$
$\equiv 2^{2016}\cdot 65\cdot 66\cdots 69\cdot 70\equiv 0(\mod 2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7)$
で十分。つまり，求める m は 6。

見通しが良い累乗の問題の解き方は
フェルマーの小定理
2 と 7 は互いに素で，7 は素数だから，
$2^{7-1}=2^6=64\equiv 1(\mod 7)$

有限の数で割った余りは必ず循環するので，
循環するまで調べればいいのだが。
オイラーの定理より
$2^{36}\equiv 1(\mod 63)$
$2^{41}\equiv 32(\mod 2016)$
$2^{41}+1\equiv 33(\mod 2016)$
余り 33 で繰り返しを始め周期は 36 の約数
まで分かっていると見通しがいい。

整数論で循環といえば，
フェルマーの小定理と拡張したオイラーの定理。

フェルマーの小定理

a と p が互いに素で p が素数のとき
$a^{p-1}\equiv 1(\mod p)$

オイラーの定理

a と p が互いに素のとき
$a^{\varphi(p)}\equiv 1(\mod p)$
ただし，$\varphi(p)$ は
p より小さい，p と互いに素な数の個数

$\varphi(63)=63\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=36$

オイラー関数は totient という名前だ。

(%i1) mod(2^2016+1,2016);

65 ………………… (%o1)

(%i2) totient(63);

36 ………………… (%o2)

では，演習。

愛媛・医

33^{20} を 90 で割った余りを求めよ。

まあ循環すると信じてやり続けてもいいが
$33^{20}=90k+r$(k は整数, r は $0\leqq r\leqq 89$ なる整数)
すると r は 9 の倍数で r' を整数として $r=9r'$ とおける
$11^2\cdot 33^{18}=10k+r'$ つまり 左辺の 10 で割った余りを求めればいい
$11^2\cdot 33^{18}\equiv 3^{18}(\mod 10)$
$3^4\equiv 1(\mod 10), 18\equiv 2(\mod 4)$ より $3^{18}\equiv 3^2=9(\mod 10)$
$r'=9$ より求める余りは 81

10 大阪

l,m,n を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\frac{n}{m}-\frac{n}{2}+1\right)l=2$ を満たす l,m,n の組をすべて求めよ。

3 元、手強いかな。範囲をせばめる方法はいくらでもある。気がついたものを書き出すと。

解法 1）変形して $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{ln}+\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2}<\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ つまり $mn<2m+2n$

解法 2）分母をなくして，$(2n-mn+2m)l=4m$ から $mn-2m-2n<0$
どちらも $(m-2)(n-2)<4, m\geqq 3, n\geqq 3$ より $m-2\geqq 1, n-2\geqq 1$ なので
$(m-2)(n-2)=1,2,3$ だけ解けばよい。また，$l=\dfrac{2}{\frac{n}{m}-\frac{n}{2}+1}$
(i)$(m-2)(n-2)=1=1\cdot 1$ よって $(l,m.n)=(4,3,3)$
(ii)$(m-2)(n-2)=2=1\cdot 2=2\cdot 1$ よって $(l,m.n)=(6,3,4),(8,4,3)$
(iii)$(m-2)(n-2)=3=1\cdot 3=3\cdot 1$ よって $(l,m.n)=(12,3,5),(20,5,3)$

解法 3）$m\geqq 3$ のもとで
$n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)=1-\frac{2}{l}<1$ より $n\frac{m-2}{2m}<1$ つまり $n<\frac{2m}{m-2}=2+\frac{4}{m-2}\leqq 6$
何故なら $m\geqq 3$ より $m-2\geqq 1$ よって $\frac{4}{m-2}\leqq 4$
よって $n=3,4,5$ だけ調べればよい。
(i) $n=3$ のとき $\frac{1}{2}-\frac{1}{m}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3l}$ つまり $lm-6l+4m=0$
$(l+4)(m-6)=-24, m-6\geqq -3$ なので $-24=24\cdot(-1)=12\cdot(-2)=8\cdot(-3)$
よって $(l,m,n)=(20,5,3),(8,4,3),(4,3,3)$
(ii) $n=4$ のとき $\frac{1}{2}-\frac{1}{m}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2l}$ つまり $lm-4l+2m=0$
$(l+2)(m-4)=-8, m-4\geqq -1$ なので $-8=8\cdot(-1)$
よって $(l,m,m)=(6,3,4)$
(iii) $n=5$ のとき $\frac{1}{2}-\frac{1}{m}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5l}$ つまり $3lm-10l+4m=0$
$9lm-30l+12m=0, (3l+4)(3m-10)=-40, 3m-10\geqq -1$ なので $-40=40\cdot(-1)$
よって $(l,m,n)=(12,3,5)$
以上 5 個。

(%i1) for l:3 thru 50 do for m:3 thru 50 do for n:3 thru 50 do if (n/m-n/2+1)*l=2 then print(l,m,n)$

$(4,3,3),(6,3.4),(8.4.3),(12,3,5),(20,5.3)$