正二十面体 regular icosahedron の体積

16 順天堂医　正二十面体の体積を求めてみよう。

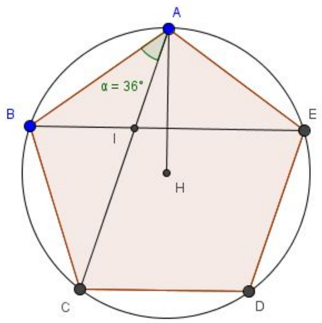
　正二十面体の各面は正三角形であり，1 つの頂点には 5 つの正三角形が集まっている。

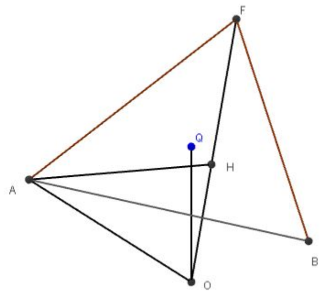
　まず，H を中心とする円に内接する正五角形 ABCDE について考える。
AC と BE の交点を I とすると，△ IAB と △ BCA を比較することにより，
$AC = \boxed{\text{ア}} AB$ となり，$\cos\angle BAC = \boxed{\text{イ}}$ となることがわかる。
これを用いて $AB = \boxed{\text{ウ}} AH$ が求まる。

　次に，H を通り円 H を含む平面に垂直な直線上に $FA = AB$ となるように F をとると，$FH = \boxed{\text{エ}} AH$ である。さらに FH の延長上に $FO = AO$ となるように O をとると $HO = \boxed{\text{オ}} AH$ であり，$FO = \boxed{\text{カ}}$ となる。

　△FAB の重心を G とすると，FG=$\boxed{\text{キ}}$AB=$\boxed{\text{ク}}$AH となる。
このとき，正五角錐 ABCDEF は O を中心とする球に内接する正十二面体の一部である。
GO=$\boxed{\text{ケ}}$ AB となり，正二十面体の表面積は $\boxed{\text{コ}}$ AB^2 となるので体積は $\boxed{\text{サ}}$ AB^3 とあらわすことができる。

前半は教科書にもある正五角形の黄金比を求めて，
$\triangle IAB \equiv \triangle$ BCA より
$AB : AC = (AC - AB) : AB$ なので
$AC^2 - AB \cdot AC - AB^2 = 0, AC > 0$
つまり，$AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} AB$
で $\cos\angle BAC = \dfrac{AC}{2 \cdot AB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$
正弦定理より $2 \cdot AH = \dfrac{AB}{\sin\angle BAC}$
で $AB = 2 \cdot \sin\angle BAC = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} AH$





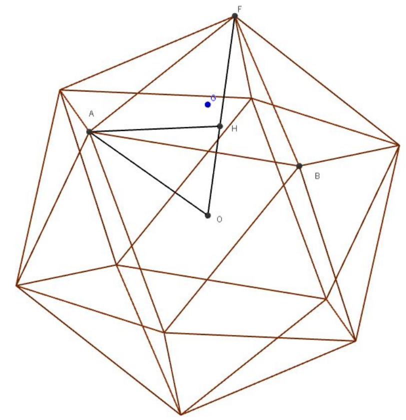
$$FH^2 = FA^2 - AH^2 = AB^2 - AH^2$$
$$= \frac{10-2\sqrt{5}}{4} AH^2 - AH^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} AH^2$$
$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} AH\right)^2$$

$OA^2 = OF^2$ より $OH^2 + HA^2 = (OH + FH)^2$ これから
$HO = \dfrac{AH^2 - FH^2}{2 \cdot FH} = \dfrac{1}{2} AH$
で $FO = FH + HO = \dfrac{\sqrt{5}}{2} AH$

後半は G は三角形 FAB の重心だから $FG = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} AB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} AH = \dfrac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{6} AH$

$$GO^2 = FO^2 - FG^2 = \frac{5}{4} AH^2 - \frac{30-6\sqrt{5}}{36} = \frac{5+2\sqrt{5}}{12} AH^2 = \frac{4}{10-2\sqrt{5}}\frac{5+2\sqrt{5}}{12} AB^2$$
$$= \frac{7+3\sqrt{5}}{24} AB^2 = \frac{14+2\sqrt{45}}{48} AB^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} AB\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} AB\right)^2$$

最後に正二十面体の表面積は $20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = 5\sqrt{3} AB^2$
なので，
体積は $\dfrac{1}{3} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} AB^3 = \dfrac{15+5\sqrt{5}}{12} AB^3$

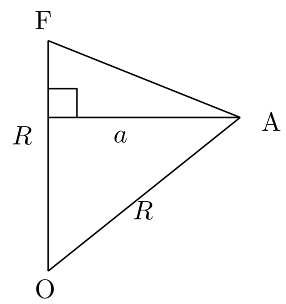


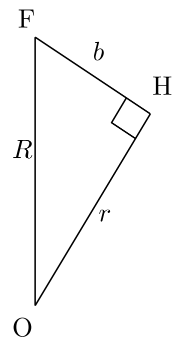
　正五角錐の頂点の延長線上の外接球の中心が
内接球の中心であり，面の中心と結ぶ線が面と垂直に
なるというのが対称性。
これは，正十二面体でも同様。
以下，対称に見ていこう。

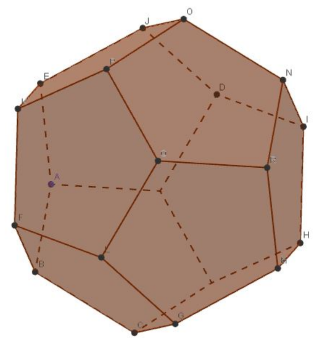
正二十面体
1 辺 1 の正三角形が 5 個集まる頂点 F
1 辺 1 の正五角形の外接円の半径 a
$a = \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

正十二面体
1 辺 1 の正五角形が 3 個集まる頂点 F
1 辺 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の正三角形の外接円の半径 a
$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

外接球の半径 R の出し方は，下の図で共通 $R = \dfrac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$
内接球の半径 r の出し方は，下の図で共通 $r = \sqrt{R^2 - b^2}$
体積 V の出し方は共通で $V = \dfrac{1}{3} \times$ (表面積) $\times$ (内接円の半径)







こっちのほうが体積が大きい。

$R = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
1 辺 1 の正三角形の外接円の中心 H 半径 b
$b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$r = \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}$
$V = \dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}$

$R = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{4}$
1 辺 1 の正五角形の外接円の中心 H 半径 b
$b = \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$r = \sqrt{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{40}}$
$V = \dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}$
こっちの二十根号をはずすのがちょっとしんどい。