伸展曲線 involution

16 順天堂医　下図のように周の長さ l の正五角形 ABCDE があり，点 D から長さ l の伸び縮みしない糸が反時計方向に巻き付けられている。この糸をたるまないように巻きほどき，糸の端 F が CD の延長上に来るまで巻きほどく。

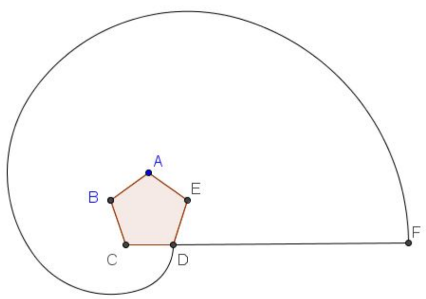
(1) 動点 F がはじめに描く中心 C の半径と中心角を求めよ。

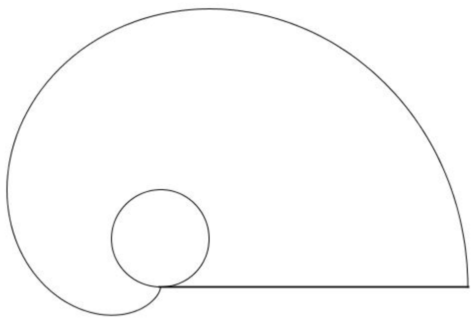
(2) 中心を変え，半径を変えながら巻ほどいていくが，それぞれの弧の中心角は (1) の中心角と変わらない。このとき，動点 F の動く距離はと糸が掃く面積はを求めよ。

(3) 同様のことを正 n 角形で行ったとき，糸の端の移動距離と糸の掃く面積を求めよ。

(4) 周の長さ l の円に巻き付けられた糸を巻きほどくときの曲線（伸展曲線）については，上式でそれぞれ n の極限をとることにより求まる。

糸の端の移動距離と糸の掃く面積を求めよ。





(1) BC を延長した直線を考えて，半径 $\dfrac{l}{5}$，中心角 $\dfrac{2\pi}{5}$

(2) $\dfrac{2\pi}{5}\left(\dfrac{l}{5}+\dfrac{2l}{5}+\dfrac{3l}{5}+\dfrac{4l}{5}+\dfrac{5l}{5}\right)=\dfrac{6}{5}l\pi,\ \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{5}\left(\dfrac{l^2}{25}+\dfrac{4l^2}{25}+\dfrac{9l^2}{25}+\dfrac{16l^2}{25}+\dfrac{25l^2}{25}\right)=\dfrac{11}{25}l^2\pi$

(3) 最初から n でやればよかった。

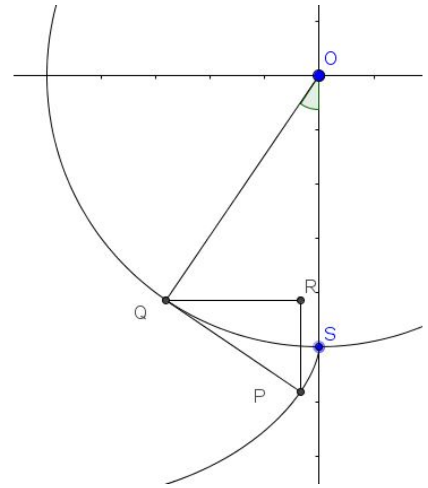
$$\frac{2\pi}{n}\left(\frac{l}{n}+\frac{2l}{n}+\cdots+\frac{nl}{n}\right)=\frac{2l\pi}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\frac{2l\pi}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{n+1}l\pi$$

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}\left(\frac{l^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2l^2}{n^2}\right)=\frac{l^2\pi}{n^3}(1^2+\cdots+n^2)=\frac{l^2\pi}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}l^2\pi$$

(4) 極限を取って，移動距離 $l\pi$, 面積 $\dfrac{1}{3}l^2\pi$

　左の下の図の曲線を媒介変数表示しよう。
円の中心を原点，図のように記号を決めて
P が動点，Q が接点，QR,RP は座標軸に平行
$\angle QOS=\theta$ とすると
$2\pi r=l$ より $r=\dfrac{l}{2\pi}$ だから

$$\begin{cases} x=-\dfrac{l}{2\pi}\sin\theta+\dfrac{l\theta}{2\pi}\cos\theta \\ y=-\dfrac{l}{2\pi}\cos\theta-\dfrac{l\theta}{2\pi}\sin\theta \end{cases}$$



　この媒介変数表示を使って曲線の長さと面積を（面積はちょっと複雑になりそうだが）求めることもできる。

簡単のために，$r=1$ としよう。

長さは極限より楽に計算ができて，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\theta\sin\theta)^2+(-\theta\cos\theta)^2}d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\theta d\theta=\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi}d\theta=2\pi^2$$

面積は極限より複雑だが，$\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi}ydx-\int_{-\pi}^{0}ydx-\int_0^{2\pi}(-1)dx-\pi$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}(-\cos\theta-\theta\sin\theta)(-\theta\sin\theta)d\theta-\int_{\pi}^{0}(-\cos\theta-\theta\sin\theta)(-\theta\sin\theta)d\theta+\Big[x\Big]_0^{2\pi}-\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\theta\sin\theta)(\theta\sin\theta)d\theta+\pi=\int_0^{2\pi}(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta)d\theta+\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\theta}{2}\sin2\theta+\frac{\theta^2}{2}(1-\cos2\theta)\right)d\theta+\pi=\frac{4}{3}\pi^3$$

$l=2\pi$ で戻してやると，長さ $l\pi$，面積は $\dfrac{1}{3}l^2\pi$