カルダノの公式

15 横浜市立　医

等式 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1\cdots(*)$ が知られている。

左辺を見て，右辺を想像することは一見難しい。これを証明するために以下の問に答えよ。

(1) $(*)$ の左辺を変形し，近似式 $(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2}x^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 \quad (|x|<1)$ を用いて（ a は実数），その近似値を求めよ。ただし，簡単にするため $5^{-\frac{1}{3}} \fallingdotseq 0.6$ とする。

(2) 3 次方程式 $x^3+3x-4=0$ を用いて，上の等式 $(*)$ を証明せよ。

「知られている」のが以下説明するカルダノの公式。つまり，(3) の三次方程式を解くカルダノの公式を使えば，この複雑な式が表れる。(3) は入試でも頻出で

$\alpha=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ は整数であることを示せ。（愛知教育大）

$\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1}$ は整数であることを示せ。（大阪教育大）

教育大に多いのは理由がありそうななさそうな。で，それだけではということなのか，(1) で（マクローリン）近似させてます。

(3) $p=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}, q=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}, x=p-q$ とおくと，$p^3-q^3=4, pq=1$ なので

$p^3-q^3=(p-q)^3+3pq(p-q)$ に代入すると，$x^3+3x-4=0$

$(x-1)(x^2+x+4)=0$ で，x は実数だから $x=1$　　「隠れた対称性を見つける」ですね。

(1) のいかにも医学科らしき計算もやっておくと，

$(1+x)^{\frac{1}{3}} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{5}{81}x^3 \quad (|x|<1)$ これを強引に使うのだから

$\left|\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right|<1$ より $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[6]{5}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}-\sqrt[6]{5}\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt[6]{5}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}\right)$

$=\sqrt[6]{5}\left(1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{5}{81}x^3-1+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{5}{81}x^3\right)=\sqrt[6]{5}x\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{10}{81}x^2\right)=2\cdot 5^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{81}\right)$

$\fallingdotseq 0.6\dfrac{124}{81}\fallingdotseq 0.9\dot{1}8\dot{5}\fallingdotseq 0.9$　　なるほど 1 に近い。

さて，カルダノの公式です。

あらゆる 3 次方程式は，変数変換で 2 次の項を消すことができる。（別の言葉で言うとあらゆる 3 次関数は変曲点について点対称）$ax^3+bx^2+cx+d=0$ なら $y=x+\dfrac{b}{3a}$ とおけばいい。

よって $x^3+px+q=0$ の形の 3 次方程式が解ければよい。

$x=u+v$ とおくと，$u^3+v^3+3uv(u+v)+pu+pv+q=0$ から $u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v)=0$

つまり $u^3+v^3+q=0, 3uv+p=0$ なる u, v を見つければいいが $v=-\dfrac{p}{3u}$ として v を消去すると

$u^3-\dfrac{p^3}{27u^3}+q=0$ つまり $27u^6+27qu^3-p^3=0$ これを 2 次方程式の解の公式で解いて

$u^3=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$ u, v について対称だから

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}}$$

$p=3, q=-4$ を代入すると，$x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

カルダノの公式

$x^3+px+q=0$ の解は　$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}-\dfrac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}+\dfrac{q}{2}}$

係数を工夫して $x^3+3px+2q=0$ の解は $x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$

$-q=7, \sqrt{q^2+p^3}=5\sqrt{2}$，から $p=1, q=-7$ つまり愛知教育大の方程式は $x^3+3x-14=0$ で $x=2$

$-q=1, \sqrt{q^2+p^3}=\sqrt{\dfrac{28}{27}}$，から $p=\dfrac{1}{3}, q=-1$ つまり大阪教育大の方程式は $x^3+x-2=0$ で $x=1$

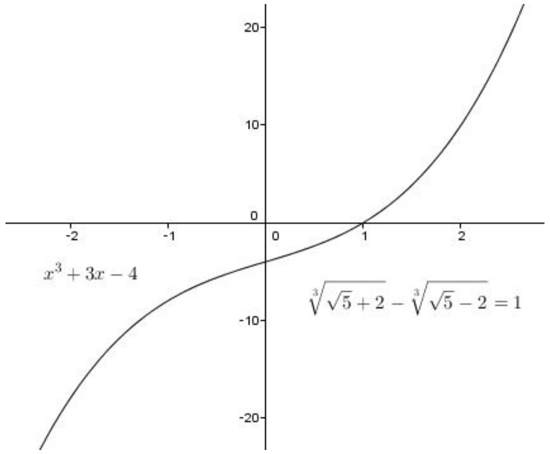
これ以上単純な数字でいける組み合わせは、調べたけどあまりない。

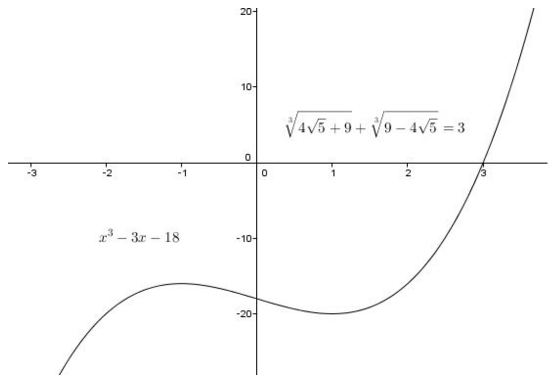
$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}=2, \sqrt[3]{4\sqrt{5}+9}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$ くらいかな。

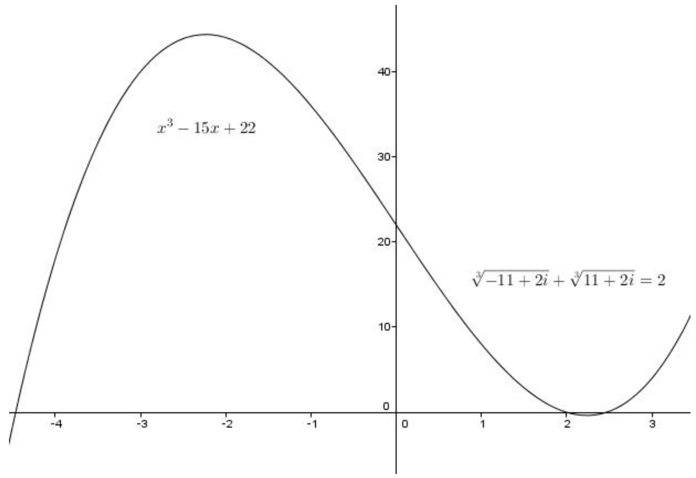
虚数まで許せば，

$\sqrt[3]{-11+2i}+\sqrt[3]{11+2i}=2$ など，たくさんできるが，高校生では $\sqrt[3]{a}$ の定義は a が実数のときのみなのでないはず。

グラフで状態を見てみると







やはり，虚数のものは実数解が 3 つあるので問題がある。