バーゼル級数

15 信大

(1) $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx (n=1,2,3,\cdots)$ とおくと，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ は収束し，

その和は $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx$ であることが知られている。これを用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和を求めよ。

(2) 等式 $\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，
定数 a,b,c の値を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $(-x)\sin n(-x)=x\sin nx$ なので $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx$

$=\dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{x}{n}\cos nx+\dfrac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\dfrac{2}{\pi}\left\{-\dfrac{\pi}{n}(-1)^n\right\}=-\dfrac{2(-1)^n}{n}$

よって，$a_n^2=\dfrac{4}{n^2}$ 題意より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$

つまり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{2\pi^2}{3}$ よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(2) 分母を払って $1=ax(x+1)+b(x+1)+cx^2$ が恒等式となるように，係数を比較して
$a+c=0, a+b=0, b=1$ よって，$a=-1, b=1, c=1$

(3) (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので，

(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-1+\frac{1}{n+1}\to\frac{\pi^2}{6}-1$

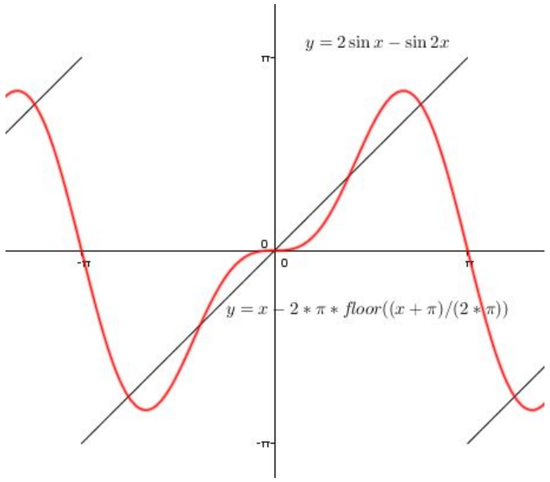
事実が知られているなら別に難問でもないが，知られている事実知りたくない？フーリエ級数です。入試問題にフーリエ級数まで出始めたか，と思ったが，Wikipedia にはバーゼル級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が $\dfrac{\pi^2}{6}$ となる証明にフーリエ級数を使ったものがちゃんと出ている。

フーリエ展開は，積分可能な関数 $f(x)$ は $f(x)=a_0+b_1\sin x+a_1\cos x+b_2\sin 2x+a_2\cos 2x+\cdots$
と級数展開されるというもの。ここでは，関数 $f(x)=x$ は奇関数だから，$x=b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots$
ただし，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx$

テーラー展開とよく似てるんだよな。微分可能な関数 $f(x)$ は $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ と級数展開される。例えば，関数 $\sin x$ は奇関数だから，$\sin x=a_1x+a_2x^3+\cdots$
ただし，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 実際は $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots$ は余計な話だけど。

だから，$x^2=b_1^2\sin^2 x+b_2^2\sin^2 2x+\cdots+2b_1b_2\sin x\sin 2x+\cdots$ すると，$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=b_1^2+b_2^2+\cdots$ というのが事実。

教科書には $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx$ を求めよ，なんて問題がよくあるがこれにつながる。すっきりしました？
え？とっと知りたい？「高木貞治再読」のフーリエ級数の部分をどうぞ。



ちなみに，Gegebra では TaylorPolynomial[sin(x), 0, 3] なんて命令があって，下はそのグラフ。