# フラクタル

**15 慶應**

　$0<\theta_n<1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ となる数列 $\{\theta_n\}$ を用いて，閉区間 $[0,1]$ から始めて，以下のようにしていくつかの閉区間を残す操作を繰り返す。ただし，$a<b$ とするとき，開区間 $(a,b)$ の長さは閉区間 $[a,b]$ の長さと等しく $b-a$ である。

　1 回めの操作では，閉区間 $[0,1]$ から長さ $\theta_1$ の開区間 $\left(\dfrac{1-\theta_1}{2},\dfrac{1+\theta_1}{2}\right)$ を取り除き，長さの等しい 2 個の閉区間 $\left[0,\dfrac{1-\theta_1}{2}\right]$ と $\left[\dfrac{1+\theta_1}{2},1\right]$ を残す。残った閉区間の個数を $k_1$ 各閉区間の長さを $r_1$ とおき，$s_1$ を $s_1=k_1r_1$ と定める。 $k_1=2, r_1=\dfrac{1-\theta_1}{2}, s_1=1-\theta_1$ である。

　$n+1$ 回目の操作では，$n$ 回目の操作を終えて残った $k_n$ 個の長さ $r_n$ の各閉区間から長さ $\theta_{n+1}r_n$ の開区間を取り除き，長さの等しい閉区間を 2 個ずつ残す。こうして残った閉区間の個数を $k_{n+1}$，各閉区間の長さを $r_{n+1}$ とおき，$s_{n+1}$ を $s_{n+1}=k_{n+1}r_{n+1}$ と定める。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ。

(2) $\theta_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

(3) $0<\theta<1$ とし，$\theta_n=\theta$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とする。$n=1,2,3,\cdots$ に対して，閉区間 $[0,1]$ を定義域とする連続関数 $f_n(x)$ と実数 $a_n$ が次の条件を満たすとする。

　条件：$f_n(0)=0$ で $f_n(1)=1$ である。関数 $f_n(x)$ は，$n$ 回目までの操作で取り除いた各開区間において微分可能で $f_n'(x)=0$ となり，$n$ 回目の操作を終えて残った各閉区間から両端を覗いた開区間において微分可能で $f_n'(x)=a_n$ となる。

このとき $a_n$ を $\theta$ と $n$ を用いて表せ。

関数 $y=f_n(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のグラフは折れ線となり，その長さを $l_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} l_n$ を求めよ。

(1) $r_n=\dfrac{r_{n-1}-r_{n-1}\theta_n}{2}=\dfrac{1-\theta_n}{2}r_{n-1}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1-\theta_k}{2}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n=0$

(2) $r_n=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-\theta_k)=\dfrac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\left\{1-\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}\right\}=\dfrac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$

$=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1\cdot4}{2\cdot3}\dfrac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdots\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{n+3}{3(n+1)}$

よって　$s_n=k_nr_n=2^n\dfrac{1}{2^n}\dfrac{n+3}{3(n+1)}=\dfrac{n+3}{3(n+1)}=\dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{3(1+\dfrac{1}{n})}\to\dfrac{1}{3}$

(3) $r_n=\left(\dfrac{1-\theta}{2}\right)^n, k_n=2^n, s_n=(1-\theta)^n$ より，

残っている区間で 1 上がれば（傾き $a_n$）いいので

$a_n=\dfrac{1}{s_n}=\dfrac{1}{(1-\theta)^n}$

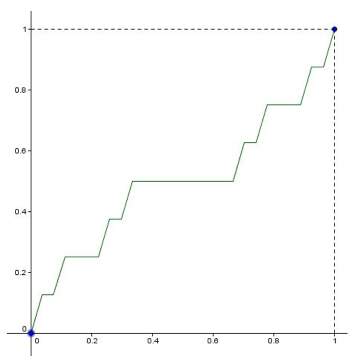
傾き $a_n$ の線分と取り去った線分に分けて

$l_n=\sqrt{1+a_n^2}(1-\theta)^n+1-(1-\theta)^n$

$=\sqrt{1+\dfrac{1}{(1-\theta)^{2n}}}(1-\theta)^n+1-(1-\theta)^n$

$=\sqrt{(1-\theta)^{2n}+1}+1-(1-\theta)^n\to 2$

$(\because 0<1-\theta<1)$

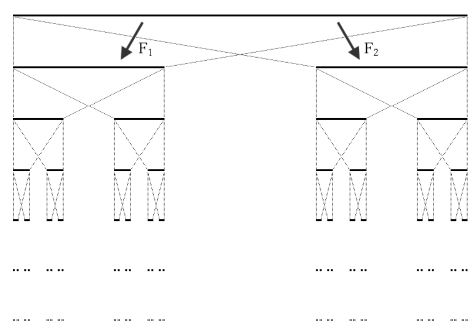


　この $\theta_n=\dfrac{1}{3}$ のときが，**カントル集合**と呼ばれるフラクタル集合。

$r_n=\dfrac{1}{3^n}, k_n=2^n, s_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Wiki から「カントール集合（cantor set）は、フラクタルの 1 種で、閉区間 [0, 1] に属する実数のうち、その三進展開のどの桁にも 1 が含まれないような表示ができるもの全体からなる集合である。マンデルブロは当初、カントール集合のことを「カントールの塵」(cantor dust) とも呼んでいた。1874 年にイギリスの数学者ヘンリー・ジョン・スティーヴン・スミス（Henry John Stephen Smith）により発見され、1883 年にゲオルク・カントールによって紹介された 。

幾何学的には、線分を 3 等分し、得られた 3 つの線分の真ん中のものを取り除くという操作を、帰納的に繰り返すことで作られる集合である。ハウスドルフ次元は log 2/log 3 (= 0.6309297...) で、1 よりも小さい値を持つ。カントール集合は、ルベーグ測度は 0 で、しかも非可算集合であるような集合の有名な例である。」

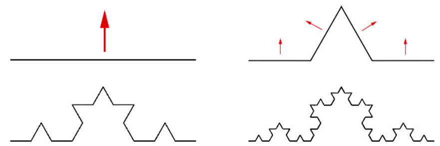



　フラクタル図形については，無限等比級数が自己相似図形として現れる。

コッホの雪片も入試ではもう何回も出ている。

カントル集合は初めて見たような気がするが，

いい問題じゃないですか。

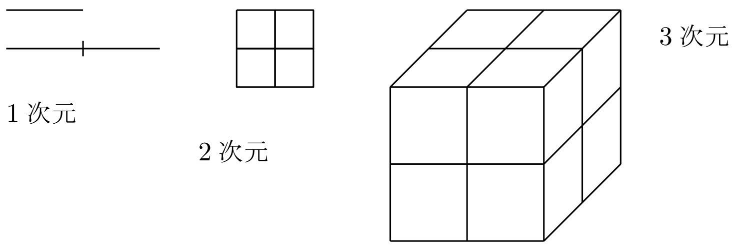


　野の石のホームページに「高校生のためのフラクタルとカオス」というところがあって，一応すべて載ってます。

そのうち，上の**ハウスドルフ次元**を残りで説明しよう。

図形を $m$ 倍したとき同じものが $n$ 個できるとき,$\log_m n$ をその図形の次元とする

下の図を見て, 直線・直方体・立方体のハウスドルフ次元が 1,2,3 となるのを実感しよう。




これで，上のカントール集合のハウスドルフ次元が $\log_3 2=\dfrac{\log 2}{\log 3}$ ということがわかるでしょう。3 倍すると 2 個できる。

もっと知りたい人は，野の石のホームページに「高校生のためのフラクタルとカオス」へ。