順天堂医科大

15 順天堂医科大

底面の半径 2，高さ 4 の円錐形の内部をもつ容器を考える。

(1) 底面を上にして容器を垂直に立てて水を満たしたとき，水の体積を求めよ。

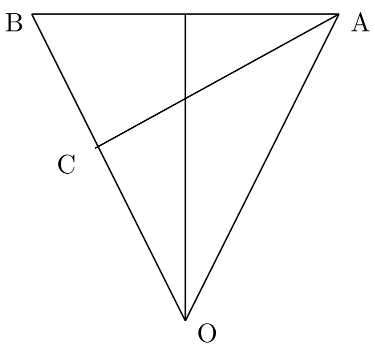
底面の一つの直径を AB，円錐の頂点を O としてとき，OB が鉛直となるように静かに傾けた。

このとき残る水の量を求めたい。

傾けたときに水面の縁となる楕円を E，OB と楕円 E の交点を C とする。

初めの位置で，頂点 O を原点，頂点を含み底面に平行な平面を xy 平面，O を通る鉛直線を上向きに z 軸，BA に平行な直線を x 軸とし，A の x 座標が正となるように座標系を定める。

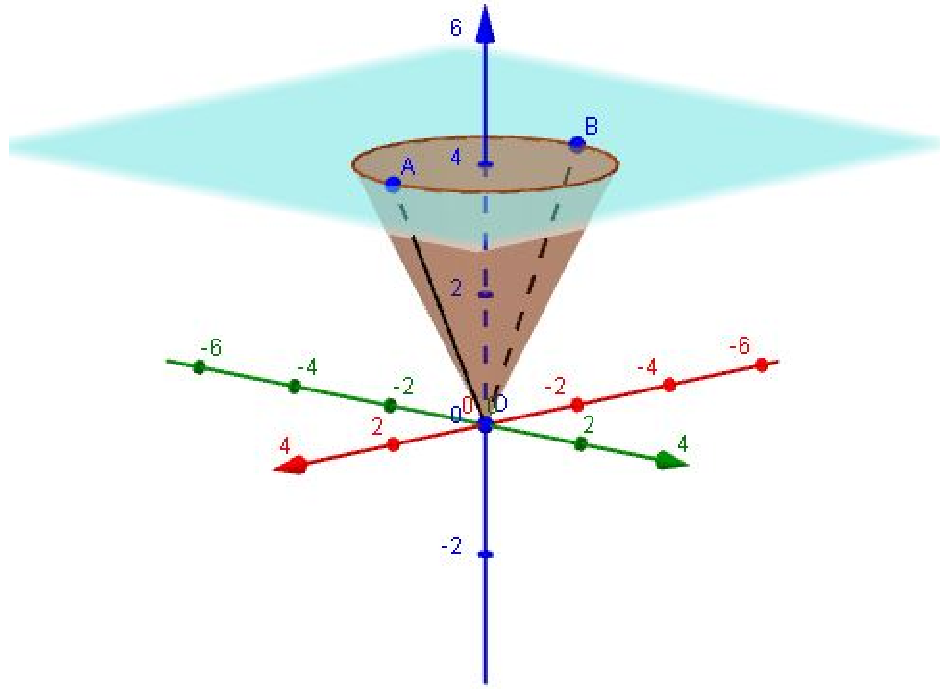
以下，この座標系で考える。

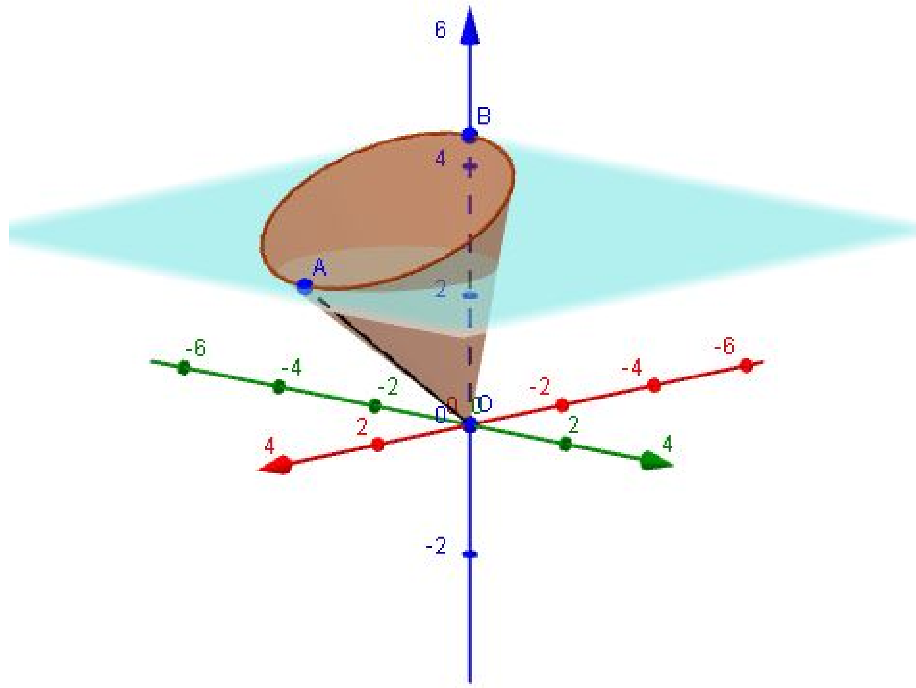


(2) 容器内面の円錐の方程式（x, y, z の方程式），また A の座標，C の座標，楕円 E 上の点が満たす方程式（ z, x の方程式）を求めよ。

(3) 楕円 E の長軸の長さ，短軸の長さ，OC の長さを求めよ。

(4) 残る水の量を求めよ。





(1) $\dfrac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 4 = \dfrac{16}{3}\pi$

(2) 円錐の方程式は教科書にはないと思うが，

中心 $(0,0,z)$ 半径 $\dfrac{z}{2}$ の円の集まりと考えて，$x^2+y^2=\left(\dfrac{z}{2}\right)^2 \cdots$ ①

$\mathrm{A}(2,4,0)$ また，楕円 E 上の点が満たす方程式は　$y=0$ の xz 平面上で AC の方程式だから，

BO（傾き-2） $\perp$ CA より CA の方程式は $z=\dfrac{1}{2}(x-2)+4$ すなわち $z=\dfrac{1}{2}x+3 \cdots$ ②

C の座標は AC と $\mathrm{BO}(z=-2x)$ の交点を出して　$\left(-\dfrac{5}{6}, 0, \dfrac{12}{5}\right)$

(3) 長軸の長さは AC の長さでいいので $\sqrt{\left(2+\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(4-\dfrac{12}{6}\right)^2}=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$

楕円の式を導くと，①と②を連立して，$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^2$ 整理して，$\dfrac{\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2}{\dfrac{64}{25}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{12}{5}}=1$

この方程式は z がない，つまり楕円柱を表しているわけだ。

よって，短軸の長さは $2\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

長軸の長さは $2\dfrac{8}{5}$ が $\dfrac{1}{2}$ 傾いているから $2\dfrac{8}{5}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ としても出せる。

$OC=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

底面の楕円の面積は $\pi\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=\dfrac{32\sqrt{3}}{5}\pi$ よって，残った水の量は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{32\sqrt{3}}{5}\pi\cdot\dfrac{6}{5}\sqrt{5}=\dfrac{64}{25}\sqrt{15}\pi$