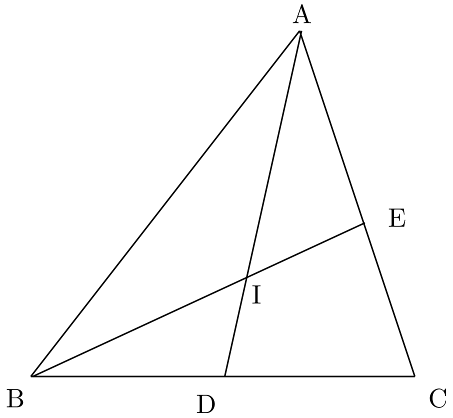
内心と外心

下の問題，綺麗すぎると思ったらやはり有名な問題でした。

14 信州医学後期　△ ABC において，BC$=a$,CA$=b$,AB$=c$ とおく。
また，△ ABC の外心を O，内心を I とおき，外接円の半径を R とおく。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$ を示せ。
(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2=R^2-\dfrac{abc}{a+b+c}$ を示せ。

受験生の出来は良かったそうだ（医学部だしなあ）。やり方もいろいろありそうだが。



(1) AD，BE はそれぞれ角 A，角 B の 2 等分線として左図のように点を決めると，角の 2 等分線の性質より BD:DC$=c:b$,CE:EA$=a:c$
メネラウスの定理より AI:ID$=b+c:a$
よって $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{a+b+c}$

$$=\frac{(b+c)\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{a+b+c}$$

$$=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

(2) さて計算。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=R$

$c^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=R^2+R^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=R^2-\dfrac{c^2}{2}$

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=R^2-\dfrac{a^2}{2},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=R^2-\dfrac{b^2}{2}$

準備完了。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2=\frac{1}{(a+b+c)^2}\left|a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)^2}\{(a^2+b^2+c^2)R^2+2(ab\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+bc\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+ca\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\}$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)^2}\{(a^2+b^2+c^2)R^2+2ab(R^2-\frac{c^2}{2}+2bc(R^2-\frac{a^2}{2})+2ca(R^2-\frac{b^2}{2})\}$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)^2}\{(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)R^2-abc(a+b+c)\}$$

$$=R^2-\frac{abc}{a+b+c}$$

問題はこれまでだが、

さらに △ ABC$=S$, 内接円の半径を r とすると $S=\dfrac{r}{2}(a+b+c)=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$

よって，$\dfrac{abc}{a+b+c}=2rR$ であることに注意すると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right|^2=R^2-2rR$$

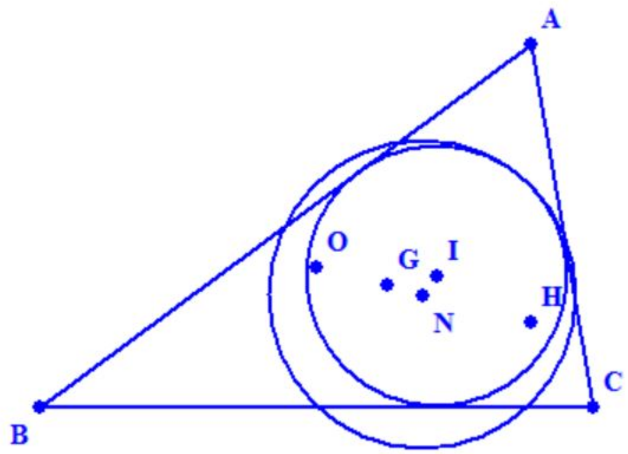
初等幾何の本ではこっちの形が出ているほうが多いかな。

さて，これで終わりだともったいないんだな。
この公式は，九点円と内接円が接するという証明に使える。
その入口まで紹介しようというのがこのプリント。この証明は他のところですることにする。（別プリント「三角形の五心をベクトルで探る」）
まず，**垂心**を H とすると（記号は左の問題と同じとして）
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を示せ。

これが示せると，重心 G は $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ だから
(2) **外心と重心と垂心は一直線（Euler 線（オイラー）という）上**に並ぶことを示せ。

ここまでは，参考書にもよくある。さらに進もう。
(3) 各辺の中点と各頂点から対辺におろした垂線の足と，AH,BH,CH の中点は同一円周（これが**九点円**）上にあることを示せ。（ヒント　この中心 N はまた Euler 線上にある）

(4) 内接円と九点円は接する
（**フォイエルバッハの定理**という）
ことを示せ。



初等幾何の本を見ても (4) は複雑です。これらの解答は「**三角形の五心をベクトルで探る**」で。