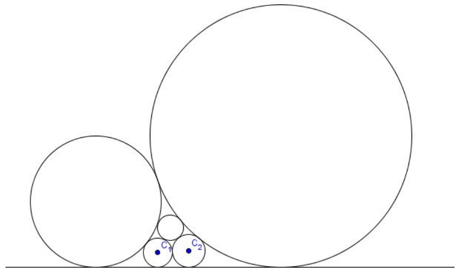
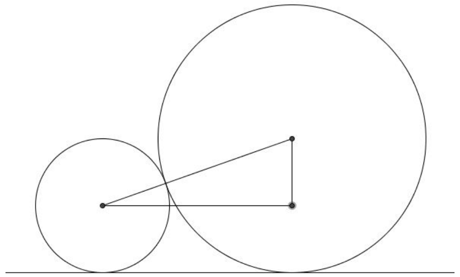
和算から

生徒が文化祭で展示するようにと近くの神社の算額から問題を持ってきた。



「図の C_1, C_2 の直径がそれぞれ 8 と 9，このとき（5 つの円が図のように外接）一番左の円の直径を求めよ。」

こういうのねえ，和算には多いんだが，複雑すぎて解く気が起こらないんだよな



それより，途中で右のような公式ができた。
右の図の中心間の水平距離は $2\sqrt{r_1 r_2}$
ただし，r_1, r_2 は円の半径。
右の直角三角形で三平方の定理を使えばすぐ。

ところで，名古屋大学は，たまに算額から取ってきたのじゃないかと思われる問題が出ることがある。

14 名古屋

xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ を次のように定める。

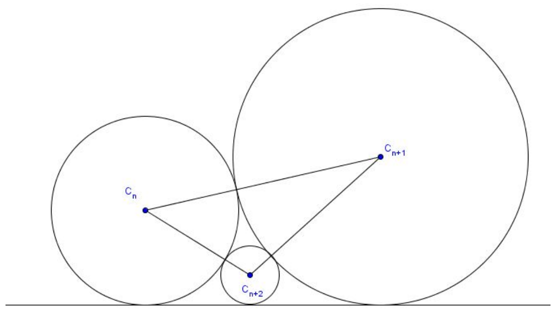
・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_{n+1} と C_n に外接し，C_{n+1} と C_n の弧および x 軸で囲まれる部分にある。円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ を示せ。

(2) 全ての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α, β, s, t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。



(1) 図を書いて関係を求めるのだが，せっかく上で作った公式を使うと

$2\sqrt{r_{n+2}r_{n+1}} + 2\sqrt{r_{n+2}r_n} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$

で，両辺を $2\sqrt{r_n r_{n+1} r_{n+2}}$ で割ると

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$

(2) フィボナッチ数列ですね，これ。$\dfrac{1}{\sqrt{r_1}} = 1, \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} = 1$

特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすると $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} - \alpha\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} = \beta\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} - \alpha\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right)$ よって $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} - \alpha\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = \beta^{n-1}(1-\alpha) = \beta^n$

同様に $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} - \beta\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = \alpha^{n-1}(1-\beta) = \alpha^n$ 片々引いて $(\beta - \alpha)\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = \beta^n - \alpha^n$

$\beta - \alpha = \sqrt{5}$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\beta^n$ 　つまり $s = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}, t = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3) $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\} = \dfrac{1}{k^n(s\alpha^n + t\beta^n)^2} = \dfrac{1}{\{s(\sqrt{k}\alpha)^n + t(\sqrt{k}\beta)^n\}^2}$

$\alpha < \beta$ より $\sqrt{k}\alpha < 1, \sqrt{k}\beta = 1$ のときしか条件を満たさない。

それは $\sqrt{k} = \dfrac{1}{\beta} = -\alpha, k = \alpha^2 = 1 + \alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

そのときの極限値は $\dfrac{1}{t^2} = 5$

もう一つ和算から取ってきたらしい問題を名古屋大学の過去問から探したが，見つからない。相当前だったか。しょうがなく他大学から，**東洋大学 12 年度**（和算からなら，さすが東洋大）

半径が等しく図のように直角三角形に内接する円の半径を求めよ。（答えは $\dfrac{5}{7}$）

ちなみに，最初の算額の問題の答は 36 なんだって。