14年　医科歯科大学

四面体でもまだまだ材料があるんですなあ。

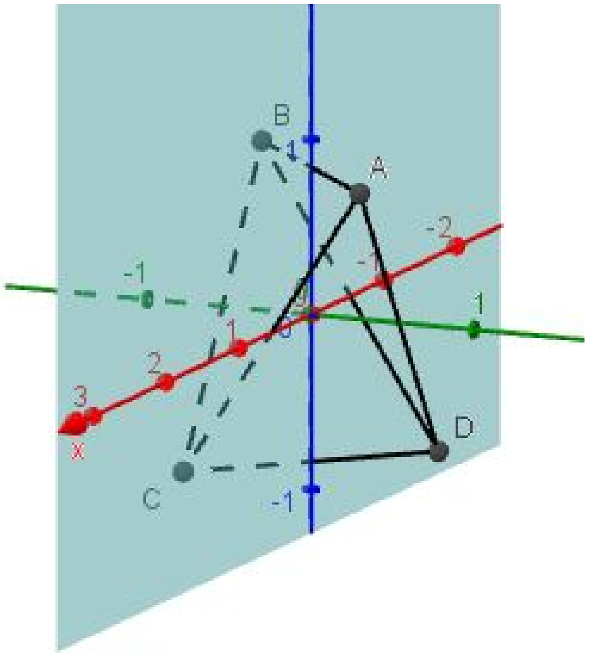
14 医科歯科大学

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空有関内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\cos\theta,\sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,-\cos\theta,\sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,-\cos\theta,-\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\cos\theta,-\sin\theta)$，を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，
この四面体の x 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。

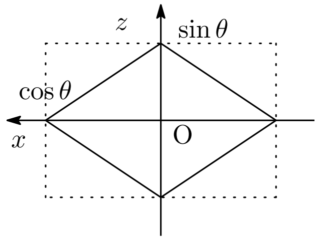
(1) $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right), V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。



左の図の AB,AC,DB,DC の中点を結んでみよ。見えたか，平行四辺形。



どうせ θ の式を出すので (1) は θ で出すことにして，

$S(\theta)=\dfrac{4\cos\theta\cdot\sin\theta}{2}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ だから (1) の $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) は楽勝，$0<2\theta<\pi$ より，$S(\theta)$ の最大値は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき 1

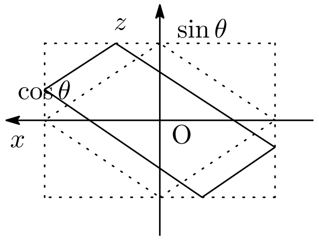
さあ体積だが，$z=t$ なる平面で切った平行四辺形の断面積を出して積分することになるが，これが面倒。先に答えを出そう，シンプソンの公式。

$\dfrac{2\cos\theta}{6}(0+0+4\cdot\sin 2\theta)=\dfrac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta$ だから (1) の $V(\theta)=\dfrac{8}{3}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}=1$

(3) も楽，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin\theta<1$，$V(\theta)=\dfrac{8}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)=\dfrac{8}{3}(\sin\theta-\sin^3\theta)$

微分して $\dfrac{V(\theta)}{d\sin\theta}=\dfrac{8}{3}(1-3\sin^2\theta)$，増減表を書いて $V(\theta)$ の最大値は $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\dfrac{16}{27}\sqrt{3}$

こんな解答はどのくらいの点数をもらえるのだろう？まあ，面倒なところもかいておくと，



$y=t$ の平面で切った断面積 S_t を積分すればよい。
いろいろな計算方法があると思うが，相似比を使いたいので
$t=(1-s)\cos\theta$ とおくと，$dt=-\cos\theta ds$ で，長方形から外側の三角形を引いて
$S_t=4\sin\theta\cos\theta-s^2\sin\theta\cos\theta-(1+s)^2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\cos\theta(3-2s-2s^2)$ なので

$V(\theta)=2\displaystyle\int_0^{\cos\theta}S_t\,dt=2\sin\theta\cos^2\theta\int_0^1(3-2s-2s^2)\,ds=2\sin\theta\cos^2\theta\left[3s-s^2-\frac{2t^3}{3}\right]_0^1$
$=\dfrac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta$

やっぱり強力，シンプソンの公式 (別紙解説)。

ちなみに $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき (2) のとおり $S(\theta)$ は最大になり，
$2AB=2CD=$ (断面の平行四辺形の 4 辺の和) $=2AC=4$，となり正四面体。
封筒で作る正四面体は封筒の幅を 2 とすると，$2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ の長さに切ればいいということになる。

牛乳のテトラパックとか，柿の種の入ったおつまみのパックとかが，幅の $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の間隔でなおかつ垂直に閉じていくわけだ。牛乳は後から入れるのかなあ，柿の種は入れてからだろうな。下の写真は四面体グッズ。封筒で作った四面体、エッシャーの模型、緩衝材。