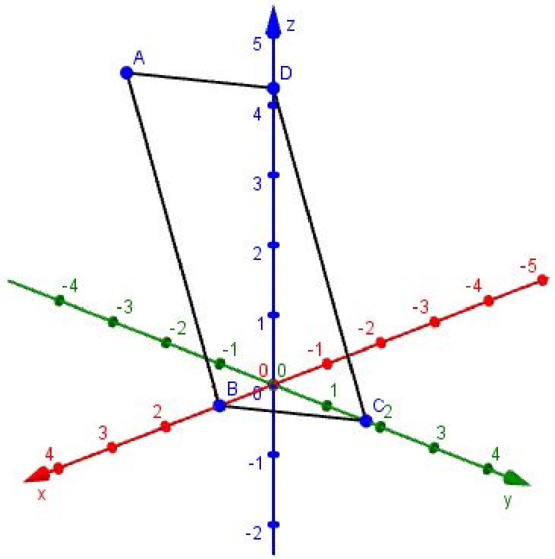
14年　慈恵医科大学

前半は平行四辺形を扱うベクトルの問題で, 後半は空間の平行四辺形を軸の回りに回してできる立体の求積。

14 慈恵医科大学 O を原点とする xyz 空間内の平面上に平行四辺形 ABCD があり，3 点 B,C,D の座標は B$(1,0,0)$,C$(0,\sqrt{3},0)$,D$(0,0,d)(d>0)$ である。辺 BC の中点を M，辺 CD を 5:1 に内分する点を N，BN と DM の交点を G とするとき，次の問に答えよ。
(1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ。
　(ii)$\angle DAG=\dfrac{\pi}{6}$ とするとき，点 A の座標と d の値を求めよ。
(2)　 A, d は (1) で求めた座標，値とする。平行四辺形 ABCD を底面とする四角錐 O-ABCD を z 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。



(1) 三角形 DBC でチェバメネラウスの定理を使い，G は DM を 2:5 に内分することを導き，

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{7}\left(5\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\\ -d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}=3,\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|^2=\dfrac{4}{49}(d^2+3)+\dfrac{36}{49}4+\dfrac{24}{49}3=\dfrac{4}{49}(d^2+57)$ から

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=2\dfrac{2}{7}\sqrt{d^2+57}=\dfrac{2}{7}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 4\sqrt{3}\\ -d\end{pmatrix}=\dfrac{2}{7}\cdot 15$

$d>0$ より $d=3\sqrt{2}$
BD の中点を E$(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\sqrt{2})$ とすると A は CE を $2:1$ に内分する点だから A$(1,-\sqrt{3},3\sqrt{2})$

(2) z 軸の周りを線分 DC と線分 AB が回るのだが，
下の方では DC が z 軸より遠く上の方では AB が遠いようだ。上の方は 1 葉双曲面，下の方は円錐だ。

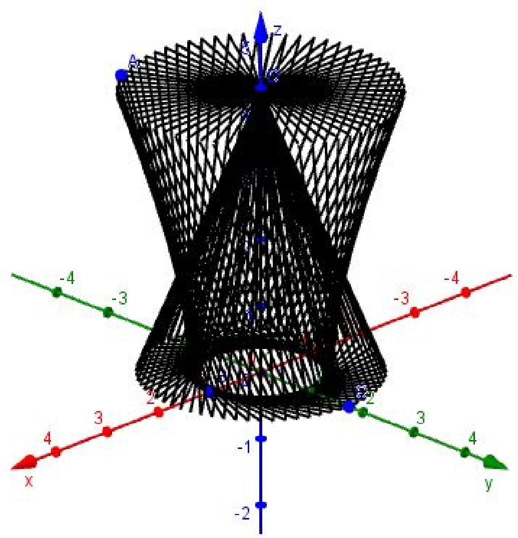
CD の方程式は $x=0,\dfrac{y-3}{-\sqrt{3}}=\dfrac{z}{3\sqrt{2}}$ z 軸からの距離は $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}z+\sqrt{3}\cdots$①

AB の方程式は $x=1,\dfrac{y}{-\sqrt{3}}=\dfrac{z}{3\sqrt{2}}$ z 軸からの距離は $\sqrt{y^2+1}=\sqrt{1+\dfrac{1}{6}z^2}\cdots$②

①=② より $z=\sqrt{2}$
さあ積分。

$\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}z^2-\sqrt{2}z+3\right)dz+\pi\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}z^2+1\right)dz$

$=\pi\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}z^2+1\right)dz+\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}z+2\right)dz=7\sqrt{2}\pi$



ちなみに「積分を楽に計算する方法」（別紙で説明）でやってみると
円錐台は，上面 $\dfrac{4}{3}\pi$ 下面 3ι 高さ $\sqrt{2}$ だから，$\left(3+\dfrac{4}{3}+\sqrt{3\cdot\dfrac{4}{3}}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi=\dfrac{19}{9}\sqrt{2}\pi$

1 葉双曲面は，上面 $\dfrac{4}{3}\pi$ 下面 3π 高さ $2\sqrt{2}$($\sqrt{2}$から $3\sqrt{2}$) だから，

$\left(4+\dfrac{4}{3}+4\cdot\dfrac{7}{3}(1+\dfrac{1}{6}z^2\text{に } z=2\sqrt{2}\text{を代入したもの})\right)\dfrac{2\sqrt{2}}{6}\pi=\dfrac{44}{9}\sqrt{2}\pi$
加えて $7\sqrt{2}\pi$