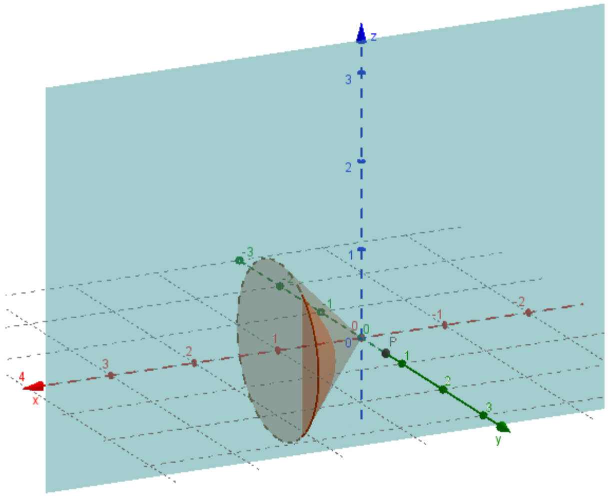
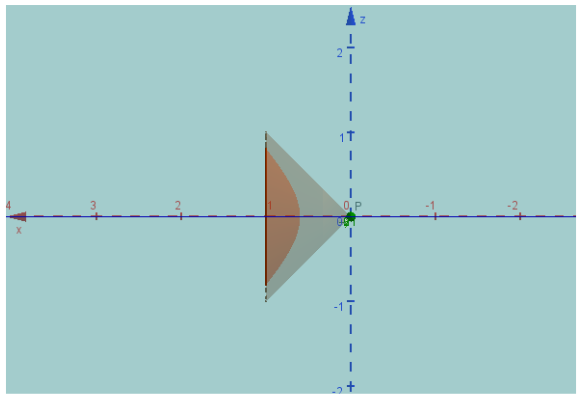
13年の立体 東大・阪大

断面積から積分させる問題が，頻出です。しかも，立体の予想が難しいときている。で，国公立編ですが、両方とも円錐の断面，かぶる事ってあるんですねえ。

大阪

xyz 空間内の 3 点 O$(0,0,0)$,A$(1,0,0)$,B$(1,1,0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。





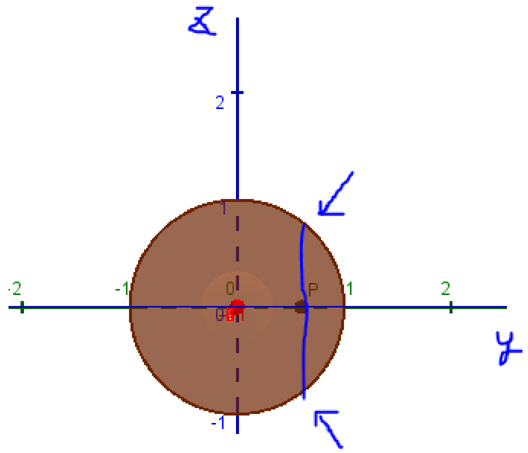
これはもう，東北大とかで何回か出題させている，一つの軸のまわりに回してからもう一つの軸のまわりに回してできる立体。

断面の形は**双曲線**ということは知らなくてもいい，$P(0,t,0)$ から放物線の遠いところがまわる外側の円盤から，近いところの内側の円盤を除いたドーナツが断面。

x 軸方向から見た右の図で Q$(1,t,\sqrt{1-t^2})$ が遠いところ $PQ^2=1+(1-t^2)=2-t^2$

よって求める体積は $2\pi\int_0^1(2-t^2-t^2)dt=\dfrac{8}{3}\pi$

大阪大とは思えない計算の楽さ。

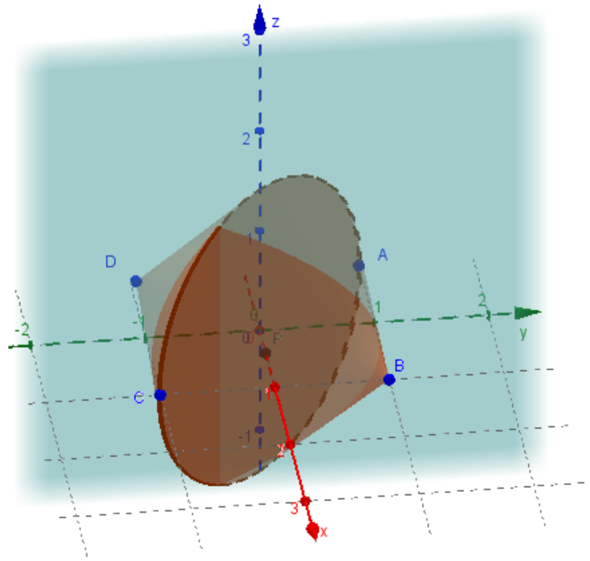


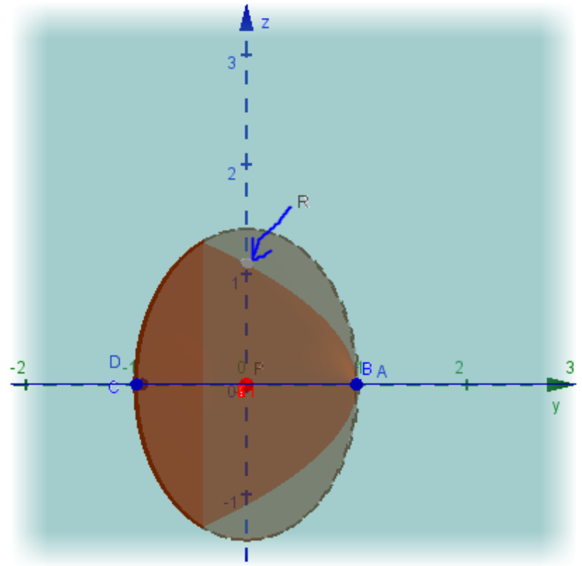
東大

正方形 A$(-1,1,0)$,B$(1,1,0)$,C$(1,-1,0$,D$(-1,-1,0)$ を S とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対して，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。





断面は**放物線**，これは知っといた方が速い。残りのスペースが少ないので，簡潔に行くと

$P(t,0,0)$ として，BD 軸方向から見た右の図で Q$(\sqrt{2}t,-\sqrt{2},\sqrt{2(1-t^2)})$

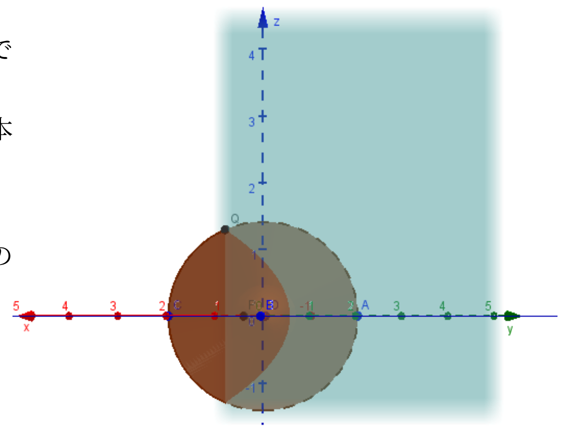
断面の面積は y 方向に t 平行移動すると放物線 2 本の間となり（右一番下の図）

$\dfrac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$

共通部分の断面は 2 つめの図の z 軸より右の部分の放物線を左に折り返したもの。

3 点を通る条件から 2 次の係数を決めて R の座標は $R(t,0,\sqrt{2(1-t)})$

よって求める体積は $2\int_0^1\dfrac{8}{3}\sqrt{2(1-t)}dt=\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$



手抜きすると

断面積は 6 分 1 の公式を使ってもいいが，放物線で囲まれた面積は，長方形の 3 分の 2 だ。

(1) の断面積は $\dfrac{2}{3}2\sqrt{2(1-t^2)}\{(t+1)+(1-t)\}$

(2) の断面積は $\dfrac{2}{3}2\sqrt{2(1-t)}\{1-(-1)\}$