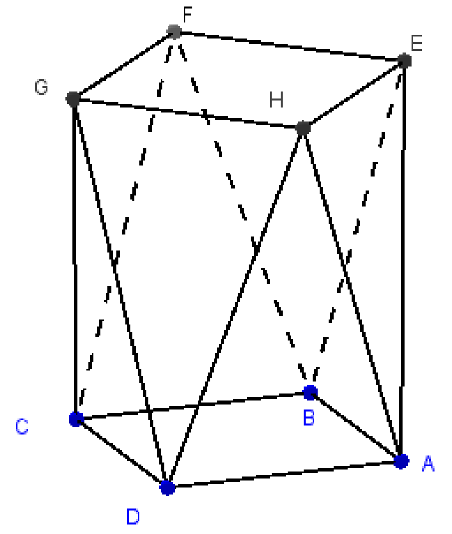
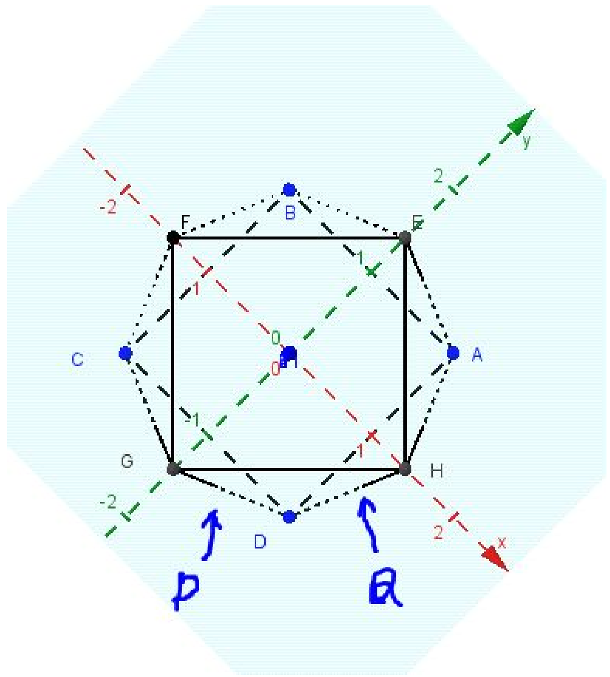
13 年の立体

断面積から積分させる問題が，頻出です。しかも，立体の予想が難しいときている。

順天堂医

一辺の長さが 2 の正方形を底面にもち，その対角線の交点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した正方形を長さ 3 の高さで上面にもつ，各頂点を結んでできる立体の体積を求めよ。（元の問題の表現はもっと丁寧にベクトルを使ってしてあるが）





穴埋め式で，誘導は高校の数学ではあまり行われない（物理の方がよく使われる）体積の増加率から断面積を求め積分させるもの。ご丁寧に展開図がつけてあった。

さて，断面は八角形。中心と各頂点を結ぶと合同な三角形が 4 つずつ。△DGH を切る辺 PQ の長さは高さ h が 1 から 3 に増加するとき 0 から 2 に増加する 1 次関数（$\dfrac{2}{3}h$），O からの距離は $\sqrt{2}$ から 1 に減少する 1 次関数（$\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}h+\sqrt{2}$）。後は同様にして

$$4\cdot\frac{1}{2}\int_0^3\left\{\frac{2}{3}h\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}h+\sqrt{2}\right)+\frac{2}{3}(3-h)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}h+1\right)\right\}dh$$

$$=\int_0^3\left\{\frac{8}{9}(\sqrt{2}-1)(-h^2+3h)+4\right\}dh=8+4\sqrt{2}$$

ねじれない正四角柱なら，体積 12 だから，ねじれて増えた分は $4(\sqrt{2}-1)\fallingdotseq 1.7$

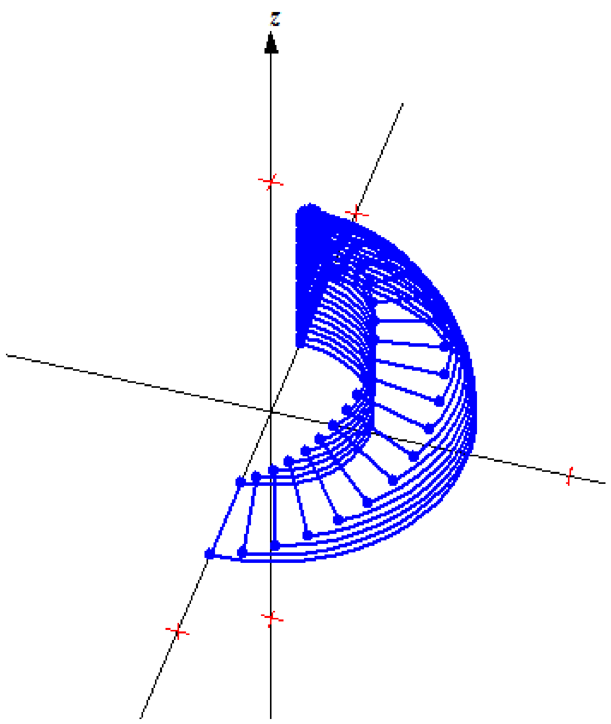
回転すると 1 葉双曲面で，体積を計算すると（08 年入試回転する正八面体　参照）$(8+2\sqrt{2})\dfrac{\pi}{2}\fallingdotseq 17.0$

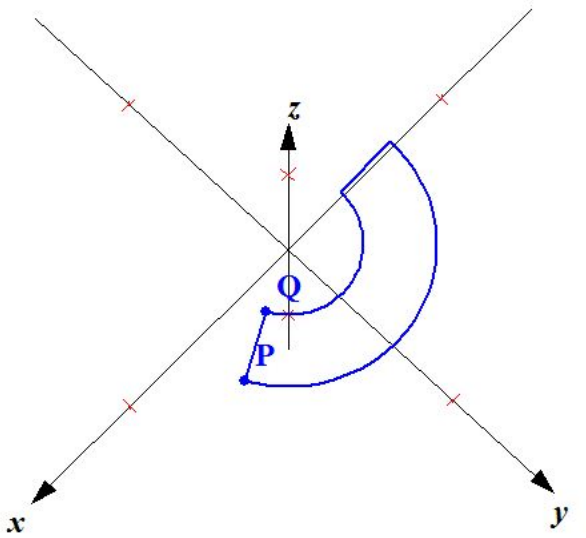
だいぶ増えるな。

体積自体は，正八角柱（$24(\sqrt{2}-1)$）に余分な出っ張りを錐の体積（$32-20\sqrt{2}$）として足せば出る。

慈恵医科大

x,y,z 空間内の平面 $z=0$ 上に 2 点 $P_\theta(\cos\theta,\sin\theta,0)Q_\theta(2\cos\theta,2\sin\theta,0)$ をとり，θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で動かすとき，線分 $P_\theta Q_\theta$ が通過する部分を D とする。空間内の $z\geqq 0$ の部分において，底面が $D, P_\theta Q_\theta$ 上の各点での高さが $\dfrac{2}{\pi}\theta$ の立体 K を考える。半球 $B:x^2+y^2+z^2\leqq 2^2, z\geqq 0$ と K の共通部分 L の体積を求めよ。





誘導は B の $z=t$ で切った切り口の円の半径をださせて，断面と積分の準備をさせている。

さて高さ t での断面は，2 つの半円（大きい方の半径 $\sqrt{4-t^2}$，小さい方の半径 1 ）で囲まれる部分の一部（ $\dfrac{\pi}{2}t$ から π まで）で，高さは 0 から，大小の半径が一致する（$\sqrt{4-t^2}=1$ つまり $t=\sqrt{3}$）まで。

$$\int_0^{\sqrt{3}}\pi(4-t^2-1)\frac{\pi-\frac{\pi}{2}t}{2\pi}dt=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)(2-t)dt=\left(\sqrt{3}-\frac{9}{16}\right)\pi$$

ちなみに左の図は Geogebra（3 次元のトレースがない），右の図は FunctionView。

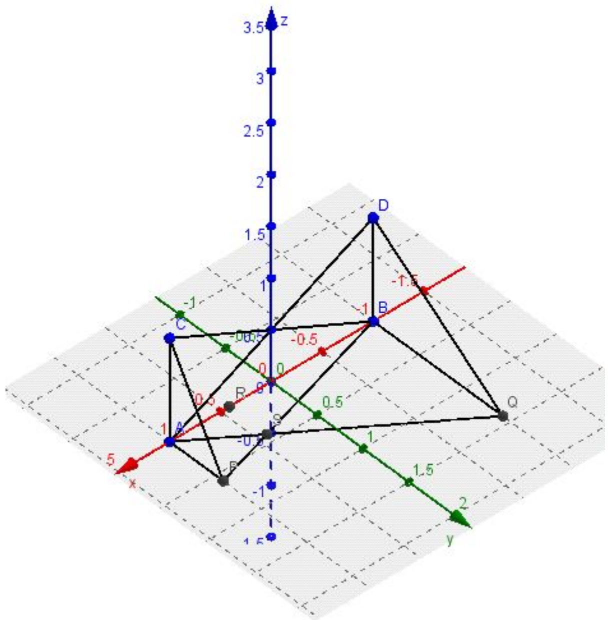
東京理科大

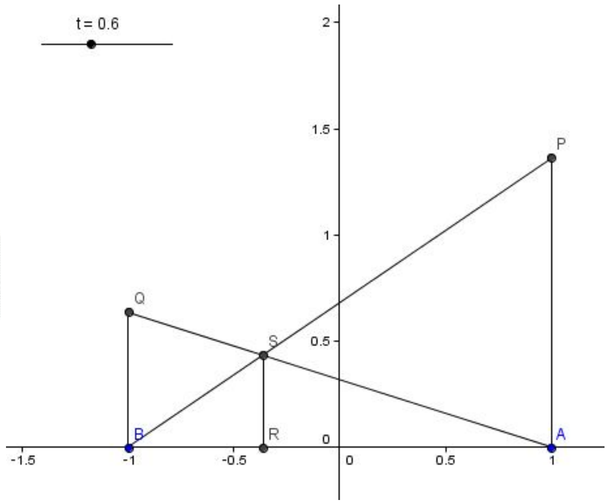
空間内に点 $\mathrm{A}(1,0,0)$，点 $\mathrm{B}(-1,0,0)$，点 $\mathrm{P}(1,2\cos^2\theta,0)$，点 $\mathrm{C}(1,0,1)$ を頂点としてもつ四面体と，点 B，点 A，点 $\mathrm{Q}(-1,2\sin^2\theta,0)$，点 $\mathrm{D}(-1,0,1)$ を頂点としてもつ四面体とがある。ただし，θ は 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間を動く実数とする。

(1) 線分 AD と線分 BC の交点の座標を求めよ。

(2) θ が 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間を動くときの，三角形 ABP と三角形 BAQ の共通部分の面積の最大値と，それが通過する部分の面積を求めよ。

(3) θ が 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間を動くときの，2 つの四面体の共通部分が通過する部分の体積を求めよ。





(1) が (3) のヒントになっていて $\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$

$\mathrm{PB}(2y=2\cos^2\theta(x+1))$ と $\mathrm{QA}(2y=-2\sin^2\theta(x-1))$ を通る直線から交点 S の座標を計算し

$\mathrm{P}(-\cos 2\theta,\dfrac{1}{2}\sin^2\theta)=(x,y)$ として θ を消去すると，$y=\dfrac{1}{2}(1-x^2)$

底辺 2 高さの最大 $\dfrac{1}{2}$ の三角形だから面積 $\dfrac{1}{2}$

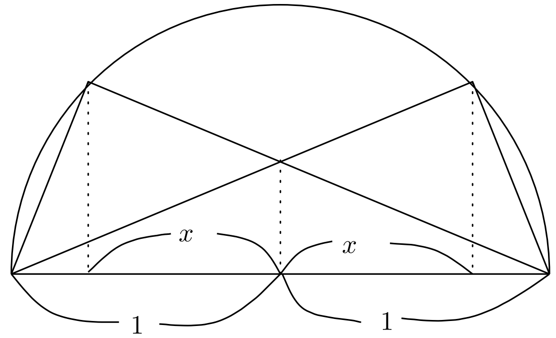
放物線で囲まれた部分の面積 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)dx=\frac{1}{2}\frac{(1+1)^3}{6}=\frac{2}{3}$

求める体積は，底面が放物線で囲まれた部分（面積 $\dfrac{2}{3}$）で (1) を頂点とする錐なので $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$

スペースの関係で早稲田を入れようかな。

早稲田

半径 1 の半円を底面とし高さが 1 の半円柱に含まれる立体の，高さ x $(0\leqq x\leqq 1)$ での断面は次の図である。立体の体積を求めよ。必要なら，積分する際に $x=\sin t$ と置き換えよ。



相似を使って断面積は 2 つの直角三角形から交わりの 2 つの直角三角形をひいて，$2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

よって，体積は $\displaystyle\int_0^1\left(2(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)dx=1$

何故なら

$$\int_0^1 2(\sqrt{1-x^2})=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin t}\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{1+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)dt=\Big[t+\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$